

О.Н. Пушкина

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
В ШКОЛЕ**

Методическое пособие

Благовещенск, 2021

УДК 519.2
ББК 22.171 я73
П 91

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
ГАУ ДПО «Амурский областной
институт развития образования»

Пушкина, О.Н. Теория вероятностей в школе: методическое пособие / О.Н. Пушкина. – Благовещенск: Издательство ГАУ ДПО «АМИРО», 2019. – 120 с.

Учебное пособие предназначено учителям математики. Цель пособия – помочь учителю в организации процесса обучения элементам теории вероятностей в общеобразовательной школе.

Рецензенты:

О.А. Сёмочкина, к.п.н., доцент кафедры физического и математического образования ФГБОУ ВО «БГПУ»;

Л.В. Филонова, к.п.н., заведующий кафедрой математики, физики и астрономии ГАУ ДПО «АМИРО».

Предисловие

Элементы теории вероятностей прочно вошли в школьный курс математики. Однако обладая одной из наиболее признанных и известных во всём мире академических школ теории вероятностей, мы до сих пор не имеем общей концепции преподавания этого предмета в школе. Несмотря на то, что курс теории вероятностей всегда присутствовал в программах педагогических вузов, большому числу опытных учителей даже при наличии прочных академических знаний бывает сложно решить простую вероятностную задачу. Это говорит, скорее всего, о том, что основы развития вероятностного мышления должны закладываться еще в школе, а не в вузе.

Школьников привлекает теория вероятностей тем, что ее изучение не требует знаний сложного математического аппарата. Для успешного усвоения этого математического раздела требуется лишь здравый смысл и умение считать. Школьник в силу своей неопытности может не задумываться над некоторыми тонкостями изучения понятий, в то время как учитель может испытывать сомнения по поводу обоснованности некоторых моментов в его рассуждениях. Практика показывает, что слабо успевающие учащиеся могут достаточно хорошо логически мыслить на материале теории вероятностей и часто показывают лучшие результаты, чем отличники и хорошисты.

Изучение теории вероятностей можно разделить по этапам. Первый этап – 5-6 классы – этап пропедевтики. На первом этапе формируются начальные представления всех составляющих вероятностной линии с опорой на жизненный опыт учащихся. Определение понятий, их описание формулируются лишь на основе рассмотрения доступных школьникам, интересных и адекватных примеров.

Второй этап – 7-9 классы – этап непосредственного изучения теории вероятностей. На этом этапе при вычислении классической вероятности учащимся необходимо показывать разные способы решения, иллюстрируя тем самым возможность работы в разных математических моделях и обучая поиску наиболее простого решения.

На третьем этапе, в 10-11 классах осуществляется возврат к изученным понятиям с включением комбинаторных формул, также изучаются основные теоремы теории вероятностей. Прежде чем изучать теоремы, необходимо рассмотреть виды событий, комбинации событий. Очень важно при изучении вероятности произведения событий обратить внимание учащихся на то, что произведение событий может рассматриваться как для одного испытания, так и для нескольких испытаний, когда события могут появляться «по цепочке». Тогда задачи можно представлять не только в буквенных обозначениях, но и в виде иллюстрации «цепочки» как ветки дерева вероятностей. Следует показать учащимся, что одно и то же событие может иметь не одну вероятность, когда речь идет об условной вероятности. Появление новой информации всегда влияет на вычисление вероятности события. Не следует пренебрегать следствиями теоремы сложения вероятностей, поскольку следствия иногда облегчают решения задач.

Цель данного пособия – помочь учителю сориентироваться в основных понятиях теории вероятностей, в способах решения задач, в том числе задач из открытого банка заданий ЕГЭ. В отдельных случаях предлагаются конкретные подходы к введению понятий и изучению формул. Это не означает, что предлагаемый способ единственно верный. Материал теории вероятностей – очень разнообразный и богатый историческими фактами – даёт возможность для творческого подхода в преподавании.

Значками «§...§» в тексте выделяются те моменты, на которые учителю нужно обратить особое внимание.

§ 1. Изучение основных понятий теории вероятностей

1. Изучение понятий «испытание» и «событие»

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие *испытания*, означающее опыт, наблюдение, измерение. В более строгом смысле *испытание есть реализация некоторого комплекса условий*.

Например, при подбрасывании монеты под реализацией комплекса условий подразумевается наличие «симметричной» монеты и ровной поверхности в пределах броска монеты. Таким образом, реплики учащихся «монета попала в щель», «монета встала на ребро» и т.п. не имеют отношения к задаче.

Результатом испытания является *событие*. События называют заглавными латинскими буквами. Например:

А – в следующем году первый снег в Москве выпадет в воскресенье;

В – свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом вниз;

С – на купленный вами лотерейный билет выпадет крупный выигрыш.

Примеры испытаний и событий приведены в таблице 1.

Таблица 1

<i>Пример испытания</i>	<i>Событие, которое может произойти в результате испытания</i>
бросается монета	появление герба
бросается кость	появление четного числа очков
ученик сдает экзамен	ученик получил «4»

✿ Несмотря на кажущуюся простоту основных понятий, с учащимися рекомендуется устно привести как можно больше примеров испытаний и событий. На данном этапе необходимо обращать внимание обучающихся на то, что испытание – это какое-то действие, а событие – результат этого действия. Тщательная «отработка» понятий на начальном этапе позволит в дальнейшем минимизировать число ошибок при решении задач на вычисление вероятности, поскольку, как показывает практика, даже хорошо успевающие ученики в качестве испытания пытаются описывать сразу их результаты. ✿

2. Случайные, достоверные, невозможные события

События бывают случайными, достоверными, невозможными, более вероятными, менее вероятными, маловероятными, равновероятными. Новые термины связываются с известными из жизни словами – часто, редко, всегда, никогда, «это очень возможно», «это обязательно произойдет», «это маловероятно», «это никогда не случится» и другими.

Прежде, чем определять новые понятия, с учащимися 5-8 классов полезно провести беседу относительно качественной оценки вероятности (возможности осуществления) событий. При работе с учащимися 9-11 классов

в такой беседе нет необходимости, достаточно сразу попросить построить определения для невозможных, достоверных и случайных событий.

Невозможные и достоверные события встречаются в жизни сравнительно редко. Можно сказать, что мы живем в мире случайных событий.

Качественная оценка вероятности событий приводит к тому, что при обсуждении в классе на один и тот же вопрос может быть дано несколько разных ответов, которые могут считаться верными, что непривычно на уроке математики и для ученика, и для учителя.

Например, при обсуждении вероятности наступления события "вам подарят на день рождения собаку" ученики в зависимости от личных обстоятельств могут дать ответы: "это маловероятное событие", "это очень возможное событие", "это достоверное событие".

При решении таких задач главное – приводимая аргументация, понимание школьника смысла используемых понятий. Если аргументация вполне логична и разумна, ответ следует считать верным.

Чтобы доказать, что данное событие – случайное, предлагается привести пример такой ситуации, когда событие происходит, и пример, когда оно не происходит.

Например, на очередных выборах партия может победить, а может и не победить, завтра на уроке математики ученика могут вызвать к доске, а могут и не вызвать.

Так, даже не проводя эксперимента, можно сказать, что событие «при бросании игральной кости выпадет чётное число» – случайное, потому что оно происходит, когда на кубике выпадает, например, четверка, и не происходит, когда на кубике выпадает, допустим, пятёрка.

В том же эксперименте при бросании кубика может выпасть только от одного до шести очков, поэтому событие «выпадет семь очков» – невозможное, а событие «выпадет меньше семи очков» – достоверное.

*Событие, которое при реализации данного комплекса условий обязательно происходит, называется **достоверным** (обозначение: и).*

*Событие, которое при реализации данного комплекса условий никогда не происходит, называется **невозможным** (обозначение: ѵ).*

*Событие, которое при реализации данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти, называется **случайным**.*

Пример 1. Бросаем два кубика. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A: на кубиках выпало одинаковое число очков;

B: сумма очков на кубиках не превосходит 12;

C: сумма очков на кубиках равна 11;

D: произведение очков на кубиках равно 11?

Решение. Исход любого бросания можно описать двумя числами, выпавшими на кубиках. Например, (3,1) означает, что на первом кубике выпало число 3, а на втором – 1.

При исходе (1,1) событие A происходит, а при исходе (1,2) – не происходит. Значит, событие A случайное.

Событие B происходит при любом исходе: ведь каждое из двух чисел на кубике не превосходит 6, а значит, их сумма не превосходит 12. Поэтому событие B достоверное.

Событие C происходит при исходе (5,6), но не происходит при исходе (2,2). Значит, оно случайное.

Наконец, для события D нет исхода, при котором оно происходит: число 11 нельзя представить в виде произведения двух целых чисел от 1 до 6, значит, это событие невозможное.

Пример 2. В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад 4 шара. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A : все вынутые шары одного цвета;

B : все вынутые шары разных цветов;

C : среди вынутых шаров есть разноцветные;

D : среди вынутых шаров есть шары всех трех цветов?

✂ В определении случайного надо обращать особое внимание, на то, что мы рассматриваем возможность наступления события именно в данных конкретных обстоятельствах, а не в произвольных (в том числе фантастических) условиях. В дальнейшем эти обстоятельства превратятся в случайный опыт или эксперимент, которому соответствует определенное множество элементарных событий. ✂

Приведем линию развития задач – от простых к более сложным.

Задача 1. Укажите, какие из следующих событий – невозможные, достоверные, случайные:

A – футбольный матч "Спартак" – "Динамо" закончится вничью;

B – вы выиграете, участвуя в беспроигрышной лотерее;

C – в полночь выпадет снег, а через 24 часа будет светить солнце;

D – завтра будет контрольная по математике;

E – 30 февраля будет дождь;

F – вас изберут президентом США;

G – вас изберут президентом России.

Ответ. Событие B – достоверное, C , E , F – невозможные, A , D , G – случайные. Но если вы решаете эту задачу накануне выходного дня, то событие D можно считать невозможным.

Задача 2. Вы купили в магазине телевизор, на который фирма-производитель дает два года гарантии. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A – телевизор не сломается в течение года;

B – телевизор не сломается в течение двух лет;

C – в течение двух лет вам не придется платить за ремонт телевизора;

D – телевизор сломается на третий год?

Ответ. События A , B , D – случайные, событие C – достоверное.

Задача 3. В коробке лежат 10 красных, 1 зеленая и 2 синих ручки. Из коробки наугад вынимают 2 предмета. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A – будут вынуты 2 красные ручки;

B – будут вынуты 2 зеленые ручки;

C – будут вынуты 2 синих ручки;

D – будут вынуты 2 разноцветных ручки;

E – будут вынуты 2 ручки;

F – будут вынуты 2 карандаша?

Ответ. События A , C , D – случайные, события B , F – невозможные, событие E – достоверное.

Задача 4. Винни Пух, Пятачок и все – все – все садятся за круглый стол праздновать день рождения. При каком количестве "всех – всех – всех" событие A – Винни Пух и Пятачок будут сидеть рядом – является достоверным событием?

Ответ. Если "всех – всех – всех" всего 1, т. е. за столом собрались всего три лица, то событие A – достоверное, если больше 1, то A – случайное событие.

Задача 5. В школе учится N учеников. При каких N событие A – в школе есть ученики с совпадающими днями рождения – является случайным, а при каких – достоверным? Выясните, произошло ли это событие в вашей школе. A в вашем классе?

Ответ. При $N \leq 366$ событие A является случайным, при $N > 366$ событие A – достоверное.

Задача 6. Среди 100 билетов школьной благотворительной лотереи 20 выигрышных. Сколько билетов вам надо купить, чтобы событие A – вы ничего не выиграете – было невозможным?

Ответ. 81 билет.

Задача 7. В шкафу 10 пар ботинок с 36-го по 45-й размеры – по одной паре каждого размера. Какое минимальное количество ботинок надо наугад вынуть из шкафа, чтобы событие A – из вынутых ботинок можно составить хотя бы одну пару – было достоверным?

Ответ. 11 ботинок.

Задача 8. В классе учатся 10 мальчиков и 20 девочек. Какие из следующих событий являются невозможными, случайными, достоверными:

A – есть два человека, родившихся в разных месяцах;

B – есть два человека, родившихся в одном месяце;

C – есть два мальчика, родившихся в одном месяце;

D – есть две девочки, родившиеся в одном месяце;

E – все мальчики родились в разных месяцах;

F – все девочки родились в разных месяцах;

G – есть мальчик и девочка, родившиеся в одном месяце;

H – есть мальчик и девочка, родившиеся в разных месяцах?

Ответ. События A, C, E, G, H – случайные, B, D – достоверные, F – невозможное.

Задача 9. На модели координатной прямой в точке 0 стоит фишка. После каждого бросания монеты она сдвигается на единицу вправо, если выпал "орел", и на единицу влево, если выпала "решка". Какие из следующих событий являются невозможными, случайными, достоверными:

A – после четырех бросаний фишка находится в точке 0;

B – после трех бросаний фишка находится в точке 2;

C – после пяти бросаний фишка находится в точке 5;

D – после пятидесяти бросаний фишка находится в точке 25;

E – после пятидесяти бросаний фишка находится в точке 26?

Ответ. События A, C, E – случайные, B, D – невозможные.

3. Элементарные и составные события

События также делятся на *элементарные* и *составные*. Подвести учащихся к новым понятиям можно, рассматривая пример с подбрасыванием кубика.

Пример 3. Кубик бросается один раз. Рассмотрим события:

A – выпало одно очко;

B – выпало два очка;

C – выпало три очка;

D – выпало четыре очка;

E – выпало пять очков;

H – выпало шесть очков;

F – выпало четное число очков;

G – выпало менее пяти очков.

На какие две группы можно разделить эти события?

Решение. Можно заметить, что событие F состоит из событий B, D и H , а событие G состоит из событий A, B, C и D . Поэтому к первой группе событий можно отнести события, которые нельзя составить из других событий: A, B, C, D, E и H , а ко второй группе можно отнести события, которые можно составить из других событий: F и G .

Таким образом, учащиеся приходят к выводу, что события, которые нельзя разделить на части или составить из других событий, называются *элементарными событиями*, а события, которые можно составить из элементарных событий, называются *составными*.

Элементарные события можно называть исходами испытания.

Если мы хотим подчеркнуть, что событие является элементарным, мы можем обозначить его маленькой латинской или греческой буквой. В примере 3 мы могли бы записать: ω_1 - выпадение одного очка; ω_2 - выпадение двух очков; ω_3 - выпадение трех очков; ω_4 - выпадение четырех очков; ω_5 - выпадение пяти очков; ω_6 - выпадение шести очков; $F = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$; $G = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Говорят, что элементарные события $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ благоприятствуют появлению события F , а элементарные события $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ благоприятствуют появлению события G .

Однако чаще при решении задач используют упрощенные обозначения: $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}, D = \{4\}, E = \{5\}, H = \{6\}, F = \{2; 4; 6\}, G = \{1; 2; 3; 4\}$.

4. Пространство элементарных событий

Еще одним важным понятием является понятие пространства элементарных событий (поля событий).

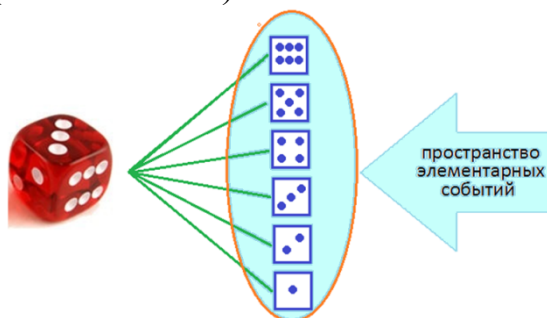


Рис. 1

Пространством элементарных событий данного испытания называют совокупность всех элементарных событий, связанных с данным испытанием.

Обозначают пространство элементарных событий буквами Ω или U .

На рисунке 1 представлено пространство элементарных событий для однократного подбрасывания кубика.

✎ Внимание учащихся следует акцентировать на том, что одно испытание заканчивается только одним элементарным событием. Понятие пространства элементарных событий также требует тщательной проработки. В связи с этим с учащимися необходимо выполнить ряд заданий на описание пространств элементарных событий для различных испытаний. При выполнении заданий учащимся полезно задавать вопросы:

- Как проверить, все ли элементарные события мы выписали?
- Являются ли выписанные элементарные события равновозможными?

Существуют опыты, в которых равновозможность элементарных событий заложена самой природой и условиями эксперимента (бросание костей, монет, раздача карт, бросание жребия и т.п.); а еще существуют опыты, в которых элементарные события мы предполагаем равновозможными, поскольку лишены оснований поступить иначе. Важным примером опыта, в котором

возникают равновозможные события, является случайный выбор - выбор наудачу. Однако мы не можем дать определение равновозможности событий. «...понятие равновероятности событий не подлежит определению, его можно только пояснить на простых примерах...» (Б.В. Гнеденко). ☼

Пример 4. Запишите Ω для испытаний: 1) одна монета бросается 2 раза; 2) один раз бросается две монеты. Отличаются ли пространства элементарных событий в этих испытаниях?

Решение. Для каждого из испытаний можно записать: $\Omega = \{гг, гр, рг, рр\}$. Таким образом пространства элементарных событий для испытаний совпадают. Мы лишь вкладываем различный смысл в запись элементарных событий. Так, например, запись «гр» для первого испытания означает, что первый раз при бросании монеты выпал герб, а второй раз выпала решка. Для второго испытания эта же запись означает, что на первой монете выпал герб, а на второй – решка. Однако математические модели испытаний оказались одинаковыми. Это означает, что при решении задачи не будет разницы, одна монета бросается два раза или же две монеты бросаются один раз.

Очевидно, что всего должно быть четыре элементарных события. Согласно комбинаторному правилу произведения, при первом броске результат может получиться двумя способами, и при втором броске – двумя способами: $2 \cdot 2 = 4$. Элементарные события являются равновозможными, так как монета не изогнута (по крайней мере, об этом не говорится в условии), а результат броска – случайный.

Пример 5. Запишите Ω для испытаний: 1) одна монета бросается 3 раза; 2) монета бросается до первого появления герба.

Решение

1) $\Omega = \{ггг, ггр, грг, ргг, гrr, ргр, ррг, rrr\}$. По комбинаторному правилу произведения имеем: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ элементарных событий. Элементарные события являются равновозможными.

2) $\Omega = \{г, рг, ррг, рrrг, \dots\}$. Пространство Ω состоит из бесконечного числа элементарных событий. Элементарные события не являются равновозможными, так как каждое элементарное событие является результатом разного числа бросков монеты.

Пример 6. Запишите Ω для испытания: игральная кость бросается 2 раза.

Решение. В данном случае пространство элементарных событий лучше представить в виде таблицы (рис. 2).

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

Рис. 2

При первом броске кубика результат можно получить шестью способами и при втором броске – шестью способами. По комбинаторному правилу произведения получим $6 \cdot 6 = 36$ элементарных событий. Элементарные события являются равновозможными, так как в условии не сказано, что кубик испорчен. Следовательно, мы полагаем, что в результате броска появление любого числа очков равновозможно.

Заметим, что для испытания, состоящего в однократном бросании двух кубиков, мы записали бы Ω точно также.

Пример 7. Запишите Ω для испытания: сначала подбрасывается монета; если выпадет «герб», то бросается игральная кость, если же выпадет «решка», то снова бросается монета.

Решение. Пространство элементарных событий для данного испытания состоит из 8 элементарных событий:

$$\Omega = \{г1, г2, г3, г4, г5, г6, рг, рр\}.$$

Эти элементарные события неравновозможны, так как в одних случаях сначала бросается монета, а потом кубик, а в других случаях дважды бросается монета.

Пример 8. В киоске продается три сорта мороженого: сливочное, шоколадное и клубничное. Андрей и Игорь покупают по одной порции мороженого. Запишите Ω для испытания.

Решение. Пространство элементарных событий лучше представить в виде таблицы:

Андрей	С	С	С	К	К	К	Ш	Ш	Ш
Игорь	С	К	Ш	С	К	Ш	С	К	Ш

И Андрей, и Игорь могут купить порцию мороженого тремя способами. По комбинаторному правилу произведения получаем $3 \cdot 3 = 9$ элементарных событий. Элементарные события неравновозможны, так как, скорее всего, мальчики будут покупать мороженое не наугад, а исходя из своих предпочтений.

5. Событие как подмножество пространства элементарных событий

До сих пор учащиеся понимали событие как результат испытания. Пришло время построить более строгое определение понятия «событие». Сделать это лучше в процессе выполнения задания.

Пример 9. Игральная кость бросается один раз. Запишите Ω для данного испытания. Запишите, из каких элементарных событий состоит событие A , означающее выпадение не более четырех очков. Чем является событие A по отношению к Ω ?

Решение. Пространство элементарных событий имеет вид: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Событие A можно записать в виде: $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Событие A по отношению к Ω является подмножеством.

Теперь учащиеся готовы сформулировать новое определение события.

Событием называется произвольное подмножество пространства элементарных событий.

Вернемся к испытанию, состоящему в двукратном бросании кубика и рассмотрим событие A , означающее, что сумма очков при первом и втором бросании кубика равна пяти (рис.3).

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Рис. 3

По рисунку 3 замечаем, что пространство Ω изображено в форме прямоугольника. Этот прямоугольник разбит на ячейки – элементарные события. На рисунке выделены ячейки, составляющие событие A . Таким образом, мы получили возможность графической иллюстрации пространства элементарных событий и события как подмножества этого пространства.

Рассмотрим еще одно событие B , означающее, что сумма очков при двукратном бросании кубика будет меньше тринадцати. Замечаем, что данное событие является достоверным и состоит из всех ячеек, представленных на рисунке 3. Следовательно, достоверное событие совпадает с пространством элементарных событий, а невозможному событию соответствует пустое множество.

В общем случае иллюстрация пространства элементарных событий и события A имеет вид, представленный на рис. 4.

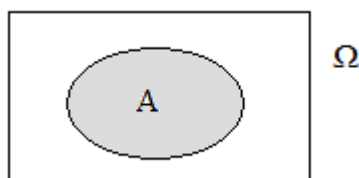


Рис. 4

☞ На данном этапе мы воспользовались понятием «множество». В дальнейшем мы можем говорить о событии, как о множестве, состоящем из элементарных событий. В этом случае все сведения, известные учащимся о множествах, механически переносятся на события. В дальнейшем единство терминологии (пересечение множеств – произведение событий, объединение множеств – сумма событий и др.) и общие методы графического изображения дадут возможность провести аналогию между множествами и событиями, облегчив тем самым решение некоторых задач.

Соответствие терминологии теории множеств и теории вероятностей представлено в таблице приложения 1. ☞

§ 2. Классическое определение вероятности

Если учащиеся только начинают знакомиться с понятием вероятности, то имеет смысл построить работу так, чтобы учащиеся сами могли построить определение классической вероятности. Если же с формулой классической вероятности работали ранее, то ее достаточно просто вспомнить.

Рассмотрим примеры, подводящие учащихся к понятию классической вероятности.

Пример 1. Кубик бросают один раз. Какое из событий имеет большие шансы произойти:

A – появление нечетного числа очков;

B – появление 7 очков;

C – появление хотя бы одного очка;

D – появление 5 очков;

E – появление не более трех очков;

K – появление более четырех очков?

Решение. Очевидно, что событие B – невозможное, а событие C – достоверное. Следовательно, событие C обязательно произойдет при проведении испытания. Остальные события являются случайными. Запишем события в виде множеств:

$$A = \{1; 3; 5\}, \quad D = \{5\}, \quad E = \{1; 2; 3\}, \quad K = \{5; 6\}.$$

Из этих четырех событий больше шансов произойти у событий A и E , так как появлению этих событий благоприятствуют большее число элементарных событий.

Пример 2. Какое из событий имеет большие шансы произойти: A – «выпадет 6 очков при подбрасывании кубика» или B – «выбрана шестерка из перетасованной колоды карт»?

Решение. Представим события в виде множеств:

$$A = \{6\}, \quad B = \{6\spadesuit; 6\heartsuit; 6\diamondsuit; 6\clubsuit\}.$$

Событию A благоприятствует только одно элементарное событие, а событию B – четыре. Однако, для события A – это одно событие из 6 возможных, а для события B – четыре из 36. Следовательно, у события A шансов появиться больше.

Решая задачу, учащиеся приходят к выводу, что *шансы событий имеет смысл сравнивать как дроби*: в числителе – сколько элементарных событий за осуществление этого события, а в знаменателе – сколько всего возможно элементарных событий. Такие дроби называют вероятностями.

☞ Шансы событий можно сравнивать с помощью дробей только тогда, когда все элементарные события пространства Ω равновозможны. Для краткости элементарные события можно называть случаями. ☞

Вероятностью события A называется отношение числа элементарных событий, благоприятствующих появлению события A , к числу всех элементарных событий испытания:

$$P(A) = \frac{l}{s}.$$

Более краткая формулировка определения: *вероятностью события A называется отношение числа случаев, благоприятствующих событию A , к числу всех случаев испытания.*

Из определения следует, что вероятность есть неотрицательное число, заключенное между 0 и 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Если событие невозможное, то его вероятность равна 0, если событие достоверное, то его вероятность равна 1.

☞ Здесь уместно показать учащимся, что в случае отождествления событий с множествами вероятности событий можно отождествлять с площадями (рис. 5). Такое отождествление в дальнейшем может помочь в решении некоторых задач на вычисление вероятностей. ☞

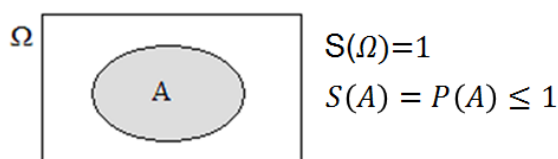


Рис. 5

Пример 3. Кубик подбрасывается один раз. Найдите вероятности всех элементарных событий данного испытания. Чему равна сумма вероятностей всех элементарных событий испытания?

Решение. Вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{6}$. Сумма вероятностей всех элементарных событий испытания равна 1.

Цель учителя при решении этой задачи – показать учащимся, что сумма вероятностей всех элементарных событий испытания равна единице.

☞ Учащиеся очень быстро «схватывают» идею вычисления вероятности и, не особенно задумываясь, механически делят одно число из условия задачи на другое. Цель учителя – подвести учащихся к осознанному решению задач на вычисление вероятности. В противном случае, учащиеся могут получить неверный ответ. ☞

Приведем линию развития задач – от простых к более сложным, способствующую осознанному восприятию учебного материала.

Задача 1. Найдите вероятности событий:

- A – при бросании монеты выпал «орёл»;
 - B – при бросании кубика выпало три очка;
 - C – при бросании кубика выпало четное число очков;
 - D – из колоды карт вытянули туза;
 - H – из колоды карт вытянули шестерку;
 - E – из колоды карт вытянули не туза.
- Будем считать, что в колоде 36 карт.

Ответ

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(D) = P(H) = \frac{1}{9}, \\ P(E) = \frac{8}{9}.$$

Задача 2. В классе учатся 10 мальчиков и 20 девочек. Учитель истории знает, что 3 мальчика и 5 девочек из класса были накануне в кино, поэтому не выучили домашнее задание. Он не знает их фамилий, но очень хочет поставить кому-нибудь двойку. Кого ему лучше вызвать к доске – мальчика или девочку?

Ответ. Так как $P(M) = \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$, $P(D) = \frac{5}{20}$ и $P(M) > P(D)$, то к доске лучше вызвать мальчика.

Задача 3. Даны числа от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что наудачу выбранное число является делителем числа 30?

Ответ. $P = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}.$

Задача 4. В классе 25 учеников. За один урок учитель успевает опросить 5 учеников, которых выбирает случайным образом. Вася не подготовился к уроку. Какова вероятность, что в этот день учитель вызовет Васю?

Ответ. $P = \frac{1}{5}.$

Задача 5. В классе 25 учеников. За один урок учитель успевает опросить 6 учеников, которых выбирает случайным образом. Вася не подготовился к уроку. Какова вероятность, что в этот день учитель вызовет Васю?

Ответ. $P = \frac{6}{25}.$

☞ Предлагая учащимся решить задачи 4 и 5, учитель преследует важную методическую цель. В задаче 4 числа подобраны так, что учащиеся сразу получают правильный ответ. При решении задачи 5 можно услышать разные варианты ответов: $\frac{6}{25}$ или $\frac{1}{6}$. Но это разные ответы. Как же выяснить, какой из ответов верный? С учащимися может получиться примерно следующий диалог:

- Почему ты делишь число 6 на число 25?
- Потому что всего в классе 25 человек, а учитель спрашивает 6.
- А при чём здесь Вася?
- Почему ты делишь число 1 на число 6?
- Потому что Вася один, а учитель спрашивает 6 человек.
- Выходит, нам все равно, сколько учащихся в классе: 25 или больше?

Вероятность от числа всех учащихся не будет зависеть?

Таким образом, перед учащимися возникла проблема, решение которой лучше немного отложить. ☞

Предлагаем следующую задачу, чтобы снова спровоцировать учащихся на неверный ответ.

Задача 6. Два человека садятся в электричку, в которой 10 вагонов. С какой вероятностью они окажутся в одном вагоне?

Ответ. $P = 0,1$.

☞ Учащиеся скорее всего скажут, что вероятность равна 0,2. Всего вагонов 10, тогда $s = 10$. $l = 2$, так как садятся в вагоны 2 человека. Тогда $P = \frac{2}{10} = 0,2$. Вероятность измерили в «человеко-вагонах», в то время как вероятность – величина безразмерная. Ответ неверный.

Подводим учащихся к мысли о том, что при решении задач нужно выстраивать более строгие математические модели. Для этого записываем с учащимся этапы решения задач на вычисление классической вероятности. ☞

Этапы вычисления классической вероятности:

1. Выяснить, в чем состоит испытание, рассматриваемое в задаче.
2. Подсчитать s – число всех случаев испытания.
3. Определить событие A , вероятность которого требуется найти.
4. Подсчитать l – число случаев, благоприятствующих появлению события A .
5. По формуле $P(A) = \frac{l}{s}$ вычислить вероятность появления события.

Этапы вычисления классической вероятности легче запомнятся, если некоторые задачи решить, заполняя таблицу 2.

Таблица 2

Испытание	s	Событие A	l	$P(A)$
Кубик бросили два раза		Сумма очков равна 7		
Монету бросили три раза		«Решка» выпала два раза		
Кубик бросили три раза		Сумма очков равна 10		
Наугад выбирают двузначное число		Первая цифра оказалась больше второй		
...		...		

☞ Важно показать учащимся, что сложность или простота решения задачи зависят от того, как мы опишем испытание. От описания испытания зависит, с какой математической моделью мы будем работать. ☞

Возвращаемся к решению задачи 5.

Первая модель. Испытание – учитель выбирает 6 учеников в определенном порядке. Тогда число всех элементарных событий: $s = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20$. Событие A – учитель вызвал Васю и еще пять учеников. Тогда с учетом порядка вызова Васи (Вася может быть вызван к доске

первым, или вторым, или третьим, или четвертым, или пятым, или шестым) число благоприятных событий будет равно: $l = 6 \cdot (1 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20)$ – по комбинаторным правилам произведения и суммы. Находим вероятность события:

$$P(A) = \frac{6 \cdot (1 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20)}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20} = \frac{6}{25}.$$

Вторая модель. Допустим, учитель заготовил заранее 25 жетонов, на 6 из которых поставил крестики. Учащийся, выбравший жетон с крестиком, отвечает у доски. Тогда испытание – Вася выбирает жетон. Сделать он это может $s = 26$ способами, так как всего 25 жетонов. Событие A – Вася выбрал жетон с крестиком. Число благоприятных элементарных событий $l = 5$. Вычисляем вероятность:

$$P(A) = \frac{6}{25}.$$

Как видим, ответы одинаковые, но вторая модель решения явно проще. Поэтому, по возможности, лучше переходить к модели с жеребьевкой. Заметим, что при описании испытаний по условию задачи мы можем говорить, что определенный жетон выбирает себе человека (как бы абсурдно это не звучало). Учащиеся зачастую сами предлагают такие формулировки. С этим мы столкнемся в параграфе 5.

Вернемся к решению задачи 6.

Первая модель. Испытание – два человека независимо друг от друга выбирают по вагону. По комбинаторному правилу произведения имеем: $10 \cdot 10 = 100$. Событие A – оба человека выбрали один вагон. Тогда первый человек может выбрать вагон 10 способами, а второй – только одним: $l = 10 \cdot 1 = 10$. Вычисляем вероятность: $P(A) = \frac{1}{10}$.

В жизни редко бывает так, что два субъекта делают выбор одновременно. Чаще всего кто-то выбор делает первым, а кто-то – вторым, не зная о выборе первого. То есть действия происходят не синхронно. Это обстоятельство значительно упрощает решение задач.

Вторая модель. Предположим, что первый пассажир уже выбрал вагон. Тогда испытание – второй пассажир выбирает вагон. $s = 10$. Событие A – второй пассажир выбрал тот же вагон, что и первый пассажир. Тогда $l = 1$. Вычисляем вероятность: $P(A) = \frac{1}{10}$.

Вторая модель проще первой.

Задача 7. В группе иностранных туристов 51 человек, среди них 2 француза. Для посещения музея группу делят на три одинаковые по численности подгруппы. Найти вероятность того, что французы окажутся в одной подгруппе.

Решение. Предположим, что туристы выбирают жетоны с номером группы. Первый француз уже выбрал себе жетон. Тогда испытание – жетон выбирает второй француз. Всего способов выбора у него $s = 50$. Событие A –

второй француз выбрал жетон с тем же номером, что и первый. Благоприятных способов $l = 16$. Вычисляем вероятность: $P(A) = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$.

Задача 8. У Пети в кармане лежит шесть монет: четыре монеты по рублю и две монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что теперь две двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

Решение. Всего в каждом кармане по три места. Предположим, что одна двухрублевая монета уже заняла свое место. Испытание – выбор места для второй двухрублевой монеты. Всего способов выбора $s = 5$. Событие A – вторая монета попала в карман к первой. Благоприятных способов $l = 2$. Тогда вероятность того, что двухрублевые монеты окажутся в одном кармане, равна $P(A) = \frac{2}{5}$.

Задача 9. Решите задачи:

1) Коля выбирает наудачу двухзначное число. Какова вероятность того, что оно оканчивается на 7?

2) Коля выбирает наудачу трехзначное число. Какова вероятность того, что оно оканчивается на 7?

3) Коля выбирает наудачу десятизначное число. Какова вероятность того, что оно оканчивается на 7?

Решение. Все эти задачи можно решать, составляя разные математические модели, каждый раз рассматривая различные испытания: выбираем двухзначное число; выбираем трехзначное число; выбираем десятизначное число. Тогда вероятности будут вычисляться соответственно:

$$1) P(A) = \frac{9 \cdot 1}{9 \cdot 10} = \frac{1}{10}; \quad 2) P(A) = \frac{9 \cdot 10 \cdot 1}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10};$$

$$3) P(A) = \frac{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10}.$$

Но можно заметить, что нас не интересуют предыдущие цифры, сколько бы их ни было; нам интересна только последняя цифра. Поэтому для трех задач испытание – выбор последней цифры; $s = 10$; событие A – выбрали цифру 7; $l = 1$; $P(A) = 0,1$.

Задача 10

1) У маленькой Вари две одинаковые пары варежек. Уходя на улицу, она наугад берет две варежки. Какова вероятность того, что они окажутся парными, т.е. на разные руки?

2) Варя потеряла одну из варежек на улице, и теперь их у неё три. Уходя на улицу, она по-прежнему выбирает две варежки случайным образом. Какова на этот раз вероятность, что они окажутся парными?

Решение

При решении данной задачи число всех случаев испытания и число благоприятных элементарных событий лучше подсчитывать с помощью

чертежа, так как необходимо учитывать, что есть варежки на левую руку и на правую. Испытание – Варя выбирает наугад две варежки. Событие A – Варя выбрала парные варежки.

1) По рис. 6 замечаем, что $s = 6, l = 4$. Тогда вероятность $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

2) Из рис. 7 имеем: $s = 3, l = 2$. Вероятность не изменилась: $P(A) = \frac{2}{3}$.

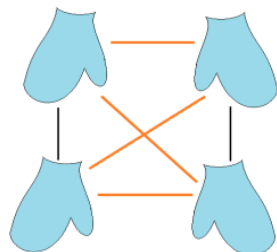


Рис. 6

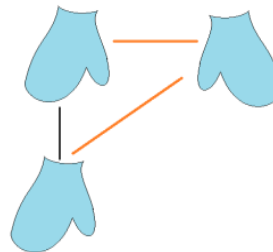


Рис. 7

§3. Справедливость выбора

При изучении классического определения вероятности учащиеся должны усвоить идею равновозможности элементарных событий. Еще раз на это обстоятельство можно обратить внимание, предложив учащимся решить следующую задачу.

Задача 1. Маша и Миша хотят определить, кто будет мыть сегодня посуду, следующим образом: каждый из них бросает кубик; если сумма очков, выпавших на двух кубиках, будет нечетным, то посуду будет мыть Маша, если – четным, то Миша. Но Миша вдруг решил, что его шансы мыть посуду больше. Он рассуждал таким образом: «Ты, Маша, будешь мыть посуду, если общее число очков, выпавших на двух кубиках, будет нечетным. Таких случаев пять: 3, 5, 7, 9, 11. Я буду мыть посуду, если это число будет четное. Таких случаев шесть: 2, 4, 6, 8, 10, 12, т.е. больше». Прав ли Миша?

Решение

Миша не прав, так как сравнивает шансы неравновозможных событий. Например, в сумме пять очков может получиться в четырех случаях: 1+4, 4+1, 2+3, 3+2, а 12 очков – только в одном случае: 6+6. Возвращаясь к рисунку 3 можно заметить, что сумма очков в 18 ячейках будет нечетной, в 18 – четной. Следовательно, шансы мыть посуду у Маши и Миши равны.

Существуют задачи, в которых нужно ответить на вопрос о справедливости какой-то игры или жеребьевки. Таких задач нет в учебниках, но они вызывают у учащихся больший интерес по сравнению со стандартными задачами. Иногда при решении таких задач нет необходимости использовать формулу классической вероятности, можно просто воспользоваться графической иллюстрацией. Если на уроках на такие задачи не остается времени, то их можно предложить в качестве домашнего задания.

Задача 2. Чтобы начать футбольный матч, судья вынимает наугад два шара из мешка с тремя белыми шарами и шестью черными. Если шары окажутся одного цвета, то судья крикнет «орёл». Если разного – «решка». Правильно ли эта жеребьевка подражает бросанию монеты?

Решение

На рис. 8 представлено графическое решение задачи. Мы подсчитываем число случаев появления шаров одного цвета: $15+3=18$ и число случаев появления шаров разного цвета: $3 \cdot 6=18$. Следовательно, жеребьевка правильно подражает бросанию монеты.

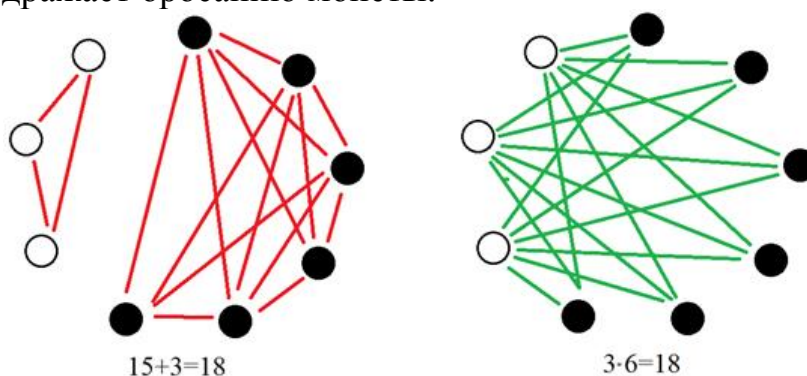


Рис. 8

Задача 3. В мешке b белых и c черных шаров. Чтобы решить, кто будет прогуливать собаку – Алёша или Борис, случайно выбираются два шара; если они будут одного цвета, собаку прогуливает Алёша, если разного – Борис. При каких b и c случайный выбор будет справедливым?

Решение. Согласно рисунку 9, в мешке должно быть 3 белых и 1 черный шар или наоборот, 1 белый и три черных шара.

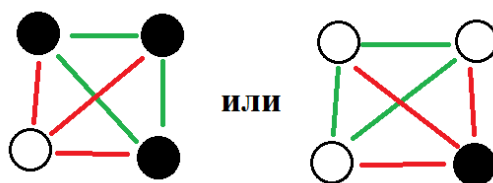


Рис. 9

Задача 4. Борис предложил Алеше следующую игру. Алеша раскладывает в ряд три заранее перемешанные карты – семёрку, восьмёрку и девятку червей, а затем в ряду напротив раскладывает свои, также заранее перемешанные карты – семёрку, восьмёрку и девятку червей – Борис. Алеша получает столько из трех жетонов, лежащих на столе, в скольких случаях напротив друг друга оказались одинаковые карты, остальные жетоны берет Борис. Побеждает тот, у кого жетонов больше. Будучи на месте Алеши, стал бы ты играть в эту игру? (Рис. 10)

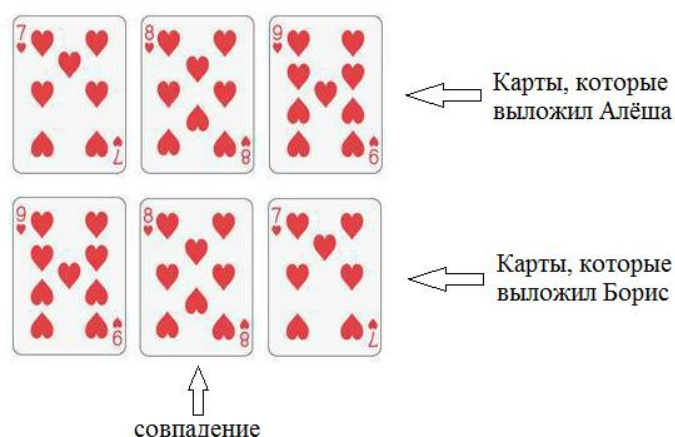


Рис. 10

Решение. При раскладывании карт совпадений может быть или три, или одно. Если совпадут две пары карт, то совпадет и третья пара, то есть будет три совпадения. Это означает, что по результатам игры Алёша сможет забрать или все три жетона (Алёша выиграл), или только один (Алёша проиграл). Следовательно, Алёша может выиграть только в случае, если совпадут три пары карт.

Предположим, что Алёша уже выложил свои карты. Испытание – Борис раскладывает свои карты под картами Алёши. Первую карту он может положить тремя способами, вторую – двумя, третью – одним. По комбинаторному правилу произведения имеем:

$$s = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Событие A – Борис разложил карты так же, как Алёша. Тогда первую карту он может положить одним способом, вторую – одним, третью – одним. По комбинаторному правилу произведения получаем: $l = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Тогда у Бориса 5 благоприятных случаев для выигрыша. Алёше не следует играть в эту игру, так шансы на выигрыш у Алёши в 5 раз меньше, чем у Бориса.

☞ Решением этой задачи можно не ограничиваться, а предложить учащимся провести небольшое исследование: будет ли справедлива игра, если выкладывать будут по 4 или 5 карт? Для ответа на этот вопрос учащимся придется воспользоваться комбинаторными правилами произведения и суммы. ☞

В последнее время для проверки знаний часто используются различные тесты, в том числе короткие. В результате возникает вопрос о справедливости оценки знаний по таким тестам. Прежде чем решать вопрос о справедливости тестов, необходимо познакомить учащихся с почти невозможными и с почти достоверными событиями.

Если вероятность события больше, чем 0,95, то событие называется практически достоверным. Это не означает, что оно обязательно произойдет в результате опыта, но мы почти уверены в том, что оно случится.

Если вероятность события меньше, чем 0,05, то событие называется практически невозможным. Конечно, оно может произойти, но мы почти уверены в том, что это не случится.

Задача 4. На уроке химии учитель предложил короткую контрольную работу. На доске он выписал 10 химических соединений. Среди них только 2 альдегида. Если ученик правильно укажет, какие из этих соединений являются альдегидами, то он получает положительную оценку. Правильно ли, по-вашему, он получает такую оценку?

Решение. Предположим, что ученик не готовился к уроку и отвечает на вопросы теста наугад.

Испытание – ученик выбирает наугад два соединения. Первое соединение он может выбрать десятью способами, второе – девятью. Тогда $s = 10 \cdot 9 = 90$.

Событие A – ученик выбрал два альдегида. Так как в списке только два альдегида, то первый альдегид можно выбрать двумя способами, а второй – одним. Следовательно, $l = 2 \cdot 1 = 2$. Находим вероятность события:

$$P(A) = \frac{2}{90} \approx 0,022.$$

Так как вероятность оказалась меньше, чем 0,05, то событие A является почти невозможным. Это означает, что если ученик не готовился, то, скорее всего, он не сможет правильно указать два альдегида. Если же событие A произошло, то это говорит в пользу того, что ученик готовился к уроку и, следовательно, положительную оценку получает справедливо.

Задача 5. Экзамен по истории включает 60 вопросов. Вова утверждает, что подготовил 80% всех вопросов экзамена. Папа задал ему три вопроса, ни на один из которых он не ответил. Есть ли у папы основания подозревать сына во лжи?

Решение. Решим задачу в предположении, что Вова говорит правду. Тогда, по его словам, он выучил 48 вопросов, а не знает еще 12.

Испытание – папа выбирает для Вовы три вопроса из 60; по комбинаторному правилу произведения получаем: $s = 60 \cdot 59 \cdot 58$. Событие A – папа выбрал для Вовы три вопроса из 12 (так как Вова на них не ответил). По комбинаторному правилу произведения $l = 12 \cdot 11 \cdot 1$. Найдем вероятность:

$$P(A) = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{60 \cdot 59 \cdot 58} \approx 0,006.$$

Так как вероятность оказалась меньше 0,05, то событие A является почти невозможным. Другими словами, если бы Вова действительно выучил 48 вопросов, то мы практически уверены в том, что он смог бы ответить хотя бы на один вопрос, заданный папой. Делаем вывод: у папы есть основания подозревать сына во лжи.

В повседневной жизни человек интуитивно пользуется правилом: в однократном опыте маловероятное событие не происходит. Однако

маловероятные события иногда происходят! Это следует помнить, если речь идет о жизни и здоровье. К сожалению, часто люди из-за своего легкомыслия недооценивают вероятность несчастия, пренебрегая правилами техники безопасности, и ничего не делают, чтобы эту вероятность уменьшить или не дать ей увеличиться. Например, вероятность столкновения корабля с айсбергом очень мала. Капитан «Титаника» мог ее еще уменьшить, снизив скорость судна. Но он не сделал этого, пытаясь сократить время корабля в пути. В результате сотни человек стали жертвами катастрофы.

Когда человеку становится скучно, он подыскивает себе какое-нибудь «лёгкое» занятие. Не являются исключением различные гадания. Шансы получить желаемое предсказание в распространенных гаданиях можно приблизительно заранее оценить. Если эти шансы оказываются очень малы или, наоборот, велики, то гадать становится неинтересно. Прежде чем решать следующую задачу, учащимся можно предложить сначала дать приближенный ответ, а затем его проверить в результате вычислений.

Задача 6. По преданию когда-то в сельских местностях России среди девушек существовало гадание. Одна из подруг зажимала в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу, а другая связывала эти травинки попарно между собой сверху и снизу. Если при этом все шесть травинок оказывались связанными в одно кольцо, то это должно было означать, что девушка в текущем году выйдет замуж. Какова вероятность того, что травинки при завязывании образуют кольцо?

Решение

Предположим, что сверху попарно травинки уже связаны. На рисунке 11 изображены шесть травинок. Дуги, соединяющие травинки, заменяют узелки.

Испытание – попарное завязывание травинок снизу. Первую свободную травинку снизу можно связать пятью способами. После этого останется свободными 4 травинки. Следующую травинку можно связать тремя способами. Осталось две свободные травинки, которые можно связать только одним способом. По комбинаторному правилу произведения делаем вывод, что снизу попарно травинки можно связать $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ способами.

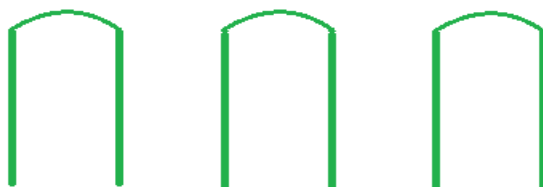


Рис. 11

Событие A – шесть травинок оказались связанными в кольцо. Подсчитаем, в скольких случаях можно получить кольцо при данном способе связывания травинок сверху (рис. 12).



Рис. 12

Первую свободную травинку можно связать четырьмя способами, так как нельзя её связывать со второй травинкой. Для удобства восприятия рисунка соединим её с последней травинкой. Вторую травинку нельзя связывать с пятой (иначе кольцо получится из четырёх травинок, а не из шести), поэтому имеем только два способа завязывания. Для наглядности соединим её с третьей травинкой. Остаются свободными концы четвертой и пятой травинки, которые мы можем связать только одним способом. По комбинаторному правилу произведения $l = 4 \cdot 2 = 8$. Находим вероятность:

$$P(A) = \frac{8}{15}.$$

§4. Статистическое определение вероятности

Изучение классического определения вероятности требует тщательного подхода, но при этом обязательно нужно показать, что данное определение применяется только для ограниченного числа случаев. Следующим шагом является изучение статистического определения вероятности. Здесь уместно задать учащимся вопрос: как определить вероятность выпадения 6 очков, если подбрасываемый кубик имеет дефект? Предлагая варианты вычисления вероятности, учащиеся придут к выводу, что необходимо провести серию испытаний с подбрасыванием кубика.

Очевидно, что вероятности таких событий, как «выход из строя радиолампы в течение часа работы», «попадание в цель при выстреле» или «пробивание брони осколком снаряда», также не могут быть вычислены по классической формуле. Вместе с тем каждое из перечисленных событий имеет определенную степень возможности.

Вероятность перечисленных событий и многих других находится опытным путем. Оно связано с понятием относительной частоты события.

Пусть проводится n опытов, событие A может появиться или не появиться. Пусть событие A появилось k раз. *Относительной частотой* $P^*(A)$ события A называют число, равное отношению числа опытов, в которых появилось событие A , к числу всех опытов:

$$P^*(A) = \frac{k}{n}.$$

☞ Заметим, что в данном параграфе мы пользуемся терминологией, общепринятой в учебниках теории вероятностей и статистики в высшей школе. В школьном учебнике авторы могут называть частоту кратностью,

а относительную частоту – частотой. На это следует обратить внимание при работе с конкретным учебником. ☞

В качестве домашнего задания перед уроком можно предложить учащимся многократное подбрасывание монеты или кубика. На следующем уроке в классе предлагается обсудить результаты подбрасываний. Например, каждый ученик провёл дома свою серию испытаний с подбрасыванием кубика. На уроке мы сможем найти относительную частоту появления шестерки. Но в разных сериях испытаний относительная частота будет различной. Можно заметить, что при небольшом числе опытов относительная частота носит случайный характер, но по мере увеличения числа опытов начинает стабилизироваться, приближаясь к некоторой постоянной.

Очевидно, что в большинстве случаев относительная частота выпадения герба будет около $\frac{1}{2}$, а относительная частота выпадения 6 очков будет около $\frac{1}{6}$.

На данном уроке будет полезным экскурс в историю предмета. Можно заметить, что свойство «устойчивости» частот, многократно проверенное экспериментально, подтверждается всем опытом человеческой деятельности. Учащиеся бросали монету дома, получили свои результаты. Но известны исторические эксперименты с подбрасыванием монеты (таблица 3).

Таблица 3 – Результаты экспериментов

Эксперимент	Число подбрасываний монеты	Число появлений герба	Относит. частота появления герба
Ж.Л.Л.Бюффон, XVIII век	4040	2048	0,507
К.Пирсон, нач. XIX века	12000	6019	0,502
К.Пирсон, нач. XIX века	24000	12012	0,501
Американские экспериментаторы, 70-е годы XX века	10000	4979	0,498

Впервые устойчивость частот была подмечена на явлениях демографического характера. Еще в древности было замечено, что для целых государств и для больших городов отношение числа родившихся мальчиков к общему числу рождений остается из года в год неизменным. В XVII-XVIII в. появился ряд фундаментальных работ, посвященных статистике народонаселения. Учащимся будет любопытно узнать об эпизоде, рассказанном Лапласом в книге «Опыт философии теории вероятностей» и произошедшем с ним при изучении закономерности рождения мальчиков и девочек. Обширные статистические материалы, изученные им для Лондона, Петербурга, Берлина и всей Франции, давали почти точно совпадающие отношения числа рождений мальчиков к общему числу рождений. Все эти отношения в течение десятилетий колебались около $22/43$. В то же время, исследуя статистические материалы по Парижу за 40 лет (1745-1784), Лаплас

получил отношение, равное 25/49. Его поразило такое значительное различие, и он начал искать объяснение данному факту. При детальном изучении архивных материалов оказалось, что в парижских метрических книгах вписаны и дети из приютов, а в приют крестьяне, проживающие вблизи Парижа, отдавали больше девочек, чем мальчиков. Это социальное явление было настолько распространенным, что существенно исказило истинную картину рождаемости в Париже. После того, как Лаплас исключил из списка детей из приютов, относительная частота рождения мальчиков оказалась равна 22/43.

То обстоятельство, что для событий, к которым применимо классическое определение вероятности, относительная частота события колеблется около вероятности, заставляет нас и в общем случае принять постоянную, около которой колеблется эта частота, за вероятность события.

✿ В методической литературе для учителей иногда встречается ошибка: вероятность определяется как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n}$. Так предложил определять вероятность немецкий математик Мизес. Однако вероятность, определенная через бесконечную серию испытаний, теряет свой объективный характер. С одной стороны, выходит, что до проведения нами бесконечного числа испытаний нельзя говорить о вероятности события. С другой стороны, относительная частота в серии из огромного числа испытаний может сильнее отличаться от истинной вероятности, нежели относительная частота в серии из меньшего числа испытаний. Конечно, такое значительное отклонение является маловероятным, тем менее вероятным, чем большее число опытов проведено.

Следует понимать, что *вероятность не определяется через частоту, а лишь исчисляется с ее помощью.*

Таким образом, можно сказать, что при увеличении числа опытов частота события не «стремится» к вероятности события, а «сходится к ней по вероятности».

Это свойство частоты и вероятности составляет содержание теоремы Бернулли (исторически первой формы закона больших чисел), которая изучается в школе по некоторым программам. ✿

С учащимися уместно поговорить о том, для чего вообще нужно знать вероятность. Знание вероятности позволяет прогнозировать события. Знание вероятности явлений важно при проектировании зданий и сооружений, расчете надежности систем автомобилей, самолетов, космических кораблей. Например, зная общее число автомобилей на дорогах страны и число произошедших за год ДТП, можно получить приближенную вероятность события «автомобиль попал в ДТП». Эту вероятность нужно знать для вычисления суммы страховой премии, которую владельцы должны уплатить страховым компаниям. Но этого мало. Требуется знать еще, по крайней мере, средний размер страховых выплат, который также поддается статистическому расчету.

Рассмотрим примеры использования понятия статистической вероятности для получения практических выводов.

Пример 1. Завод выпускает массовую продукцию. Если изделие, выпущенное заводом и поступившее в продажу, выходит из строя в течение года, то требуется его заменить запасным. Сколько необходимо запасных изделий, если в течение года продается N изделий, произведенных заводом?

Решение. Для простоты предположим, что выход из строя запасного изделия невозможен.

Для практического решения этой задачи поступают следующим образом: считают, что событие A – «отказ изделия» имеет некоторую вероятность p . Относительная частота этого события: $P^*(A) = \frac{k}{N}$, где k – число изделий, вышедших из строя.

Если вероятность p известна, то $\frac{k}{N} \approx p$, откуда находим: $k \approx p \cdot N$. Таким образом, при известной вероятности можно дать приближенную оценку числа изделий, вышедших из строя.

Предположим, что вероятность p неизвестна. Тогда следует поставить некоторое число опытов, каждое из которых состоит в испытании некоторого изделия в течение года. Вычислив $P^*(A)$, найдем: $k \approx N \cdot P^*(A)$. $\square$

Пример 2. С утра сидит на озере любитель – рыболов. Он поймал сетью поодиночке 99 рыб. Пометив каждую рыбку краской, он выпустил их в озеро. Через неделю он поймал 90 рыб и 1) обнаружил среди них 9 меченых; 2) не обнаружил среди них ни одной меченой. Сколько примерно рыб в озере?

Решение. Испытание – вылов одной рыбки. Событие A – поймана меченая рыба.

Пусть в озере имеется N рыб. Тогда $P(A) = \frac{99}{N}$.

1. $P^*(A) = \frac{9}{90}$. Так как $P(A) \approx P^*(A)$, то $\frac{99}{N} \approx \frac{9}{90}$, откуда находим приближенное число рыб в озере:

$$N \approx \frac{99 \cdot 90}{9} = 990.$$

2. Обозначим через k количество меченых рыб, пойманных через неделю. По условию $k = 0$, т.е. $k < 1$. Так как $P(A) \approx P^*(A)$, то $\frac{99}{N} \approx \frac{k}{90}$, откуда

$$N \approx \frac{99 \cdot 90}{k} = \frac{8910}{k}.$$

Но поскольку $k < 1$, то $N > 8910$.

Следовательно, мы можем дать нижнюю оценку количества рыб в озере: рыб в озере больше 8910. $\square$

По такой же схеме оценивают урожай на плантации по урожаю на некотором числе небольших участков, удельный вес минерала по результатам взвешивания некоторого числа образцов, а также множество других физических, биологических, экономических характеристик.

Статистическое определение вероятностей играет большую роль для приложения теории вероятностей.

Практическое толкование полученных вероятностей связано именно со статистическим определением. Если мы будем говорить, что вероятность попадания в цель для стрелка равна 0,92, то будем понимать, что данный стрелок попадает в цель в среднем 92 раза из 100 выстрелов, то есть в 92% выстрелов.

Если вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,005, то это означает, что в среднем на каждую тысячу готовых изделий приходится 5 бракованных, то есть бракованных изделий 0,5% от общего числа изделий.

При этом мы помним, что вероятность – это число из отрезка от 0 до 1, а не проценты.

§ 5. Классическое определение вероятности в задачах КИМ ЕГЭ

Рассмотрим основные прототипы задач по теме «Классическое определение вероятности», представленных в открытом банке задач на сайте www.mathege.ru.

Задача 1. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Решение. Испытание – жребий №1 выбирает себе спортсменку. Всего способов это сделать $s = 20$. Событие A – жребий №1 выбрал спортсменку из Китая. Найдём число спортсменок из Китая: $l = 20 - (8 + 7) = 5$. Находим вероятность события A : $P(A) = \frac{5}{20} = 0,25$.

Обратим внимание на формулировки следующих задач.

Задача 2. Фабрика выпускает сумки. В среднем **на** 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Задача 3. В среднем **из** 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ошибочное решение задачи 2

Всего 100 сумок; $100 - 8 = 92$. $P(A) = \frac{92}{100} = 0,92$. Но здесь не нужно округлять результат до сотых!

Обращаем внимание на предлоги: в задаче 2 стоит предлог «на», а это означает, что сумок всего не 100, а 108. Тогда вероятность события равна $P(A) = \frac{100}{108} \approx 0,93$.

В задаче 3 стоит предлог «из». Тогда всего 1000 насосов. Вероятность события равна $P(A) = \frac{995}{1000} \approx 0,995$.

Задача 4. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Решение

Испытание – Профессор М. выбирает жетон с номером дня выступления; $s = 75$. Событие A – профессор М. выбрал жетон с номером 5; $l = (75 - 17 \cdot 3) : 2 = 12$. $P(A) = \frac{12}{75} = 0,16$.

Задача 5. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Решение

Испытание – Руслан Орлов выбирает соперника; $s = 25$. Событие A – Руслан Орлов выбрал соперника из России; $l = 9$. $P(A) = \frac{9}{25} = 0,36$.

Задача 6. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение

Испытание – представитель России выбирает жребий с номером дня выступления; $s = 80$. Событие A – представитель России выбрал жребий с номером 3; $l = 18$. $P(A) = \frac{18}{80} = 0,225$.

Задача 7. На семинар приехали 3 ученых из Норвегии, 3 из России и 4 из Испании. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад ученого из России.

Решение. Испытание – жребий № 8 выбирает себе докладчика; $s = 10$. Событие A – жребий № 8 выбрал докладчика из России; $l = 3$. $P(A) = \frac{3}{10} = 0,3$.

Задача 8. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение. Испытание – команда из России выбирает жребий с номером группы; $s = 16$. Событие A – команда из России выбрала жребий с номером 2; $l = 4$.

$$P(A) = \frac{4}{16} = 0,25.$$

Задача 9. На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

Решение

1 способ. Испытание – три группы занимают место для выступления; $s = 3! = 6$ ($\Omega = \{\text{ДШН, ДНШ, ШНД, ШДН, НШД, НДШ}\}$). Событие A – группа из Дании выступает последняя; $l = 2$ ($A = \{\text{ШНД, НШД}\}$). $P(A) = \frac{2}{6} \approx 0,33$.

2 способ. Испытание – группа из Дании выбирает номер выступления; $s = 3$. Событие A – группа из Дании выбрала номер 3; $l = 1$. $P(A) = \frac{1}{3} \approx 0,33$.

Задача 10. В классе 26 человек, среди них два близнеца — Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение. Предположим, что Андрей уже выбрал жребий с номером группы. Испытание – Сергей выбирает жребий с номером группы; $s = 25$. Событие A – Сергей выбрал жребий с тем же номером, что и Андрей; $l = 12$.

$$P(A) = \frac{12}{25} = 0,48.$$

Задача 11. В классе 16 учащихся, среди них два друга – Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

Решение. Предположим, что Вадим уже выбрал жребий с номером группы. Испытание – Сергей выбирает жребий с номером группы; $s = 15$. Событие A – Сергей выбрал жребий с тем же номером, что и Вадим; $l = 3$.

$$P(A) = \frac{3}{15} = 0,2.$$

Задача 12. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию

получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение

1 способ. Испытание – выбор одного яйца. Событие A – выбрано яйцо из первого хозяйства. Нам неизвестно ни общее количество яиц, ни количество яиц из первого хозяйства. Воспользуемся графической иллюстрацией (рис. 13). Изобразим множество всех яиц в виде прямоугольника, разделенного на две части: прямоугольник слева соответствует событию A (выбрано яйцо из первого хозяйства), прямоугольник справа соответствует событию – выбрано яйцо из второго хозяйства. Так как вероятности событий мы отождествляем с площадями, то обозначим искомую вероятность: $P(A) = S(A) = x$.

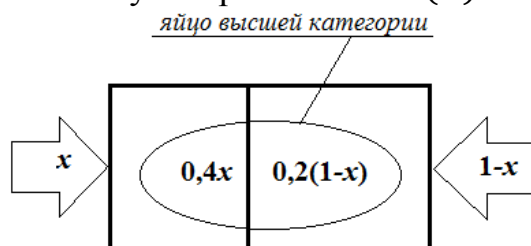


Рис. 13

Так как площадь большого прямоугольника равна 1, то площадь прямоугольника справа равна $1 - x$. Изобразим внутри большого прямоугольника в виде овала событие, означающее, что выбрано яйцо высшей категории. Пересечение овальной области с левым прямоугольником будет означать, что выбрано яйцо высшей категории из первого хозяйства. Тогда площадь области пересечения составляет 40% от x , то есть равна $0,4x$. Пересечение овальной области с правым прямоугольником будет означать, что выбрано яйцо высшей категории из второго хозяйства, площадь этой области равна $0,2(1 - x)$. Из условия известно, что всего высшую категорию получает 35% яиц. Следовательно, площадь овальной области равна 0,35. Составим уравнение:

$$0,4x + 0,2(1 - x) = 0,35.$$

Решая уравнение, находим искомую вероятность:

$$P(A) = x = 0,75.$$

2 способ. Пусть всего имеется n яиц, из них m яиц из первого хозяйства. Испытание – выбор одного яйца; $s = n$. Событие A – выбрано яйцо из первого хозяйства; $l = m$. $P(A) = \frac{m}{n}$. Всего яиц высшей категории – $0,35n$, яиц высшей категории из первого хозяйства – $0,4m$, яиц высшей категории из второго хозяйства – $0,2(n - m)$. Составим уравнение $0,4m + 0,2(n - m) = 0,35n$. Выразим $m = 0,75n$ и подставим в формулу вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0,75n}{n} = 0,75.$$

Задача 13. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных

тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов.

Решение

1 способ. Испытание – выбор тарелки. Событие A – выбрана тарелка без дефектов. Пусть на фабрике всего произвели n тарелок. Тогда из них имеют дефект $0,1n$ тарелок, без дефектов $0,9n$ тарелок. Из них будет отбраковано $0,8 \cdot 0,1n = 0,08n$, а в продажу поступит $n - 0,08n = 0,92n$ тарелок. Получили: $s = 0,92n$, $l = 0,9n$. Находим вероятность: $P(A) = \frac{0,9n}{0,92n} = \frac{45}{46}$.

2 способ. Испытание – выбор тарелки. Событие A – выбрана тарелка без дефектов. Пусть на фабрике произвели 1000 тарелок. Тогда из них дефект имеют 100 тарелок, не имеют дефектов 900 тарелок. Из 100 тарелок с дефектом в продажу поступит 20 тарелок (20%). Следовательно, всего в продаже окажется 920 тарелок. Находим вероятность: $P(A) = \frac{900}{920} = \frac{45}{46}$.

§ 6. Операции над событиями

Изучение этой темы можно начать с простейших примеров, связанных, например, с однократным бросанием кубика. Описав несколько событий, можно предложить учащимся найти сумму, произведение событий. Можно предложить подобрать более простые формулировки для описания полученных событий.

С учетом того, что данная тема изучается не раньше 10 класса и учащиеся готовы к формализованным понятиям, можно сразу дать определения операциям над событиями. Поскольку ранее была установлена аналогия между множествами и событиями, восприятие новых терминов не должно быть затруднительным.

Перечислим основные определения, связанные с операциями над событиями.

Суммой событий A и B называется событие C , которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий A или B : $C=A+B$ или $C=A \cup B$ (логическая связка – союз «или») (рис.14 и 15).

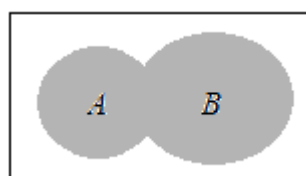


Рис. 14



Рис. 15

Произведением событий A и B называется событие C , которое состоит в одновременном наступлении и события A , и события B : $C=A \cdot B$ или $C=A \cap B$ (логическая связка – союз «и») (рис.16).

События A и B **несовместимы** (несовместны), если появление одного исключает появление другого: $A \cdot B = \emptyset$ - невозможное событие или $A \cap B = \emptyset$ (рис.17). В противном случае события A и B являются совместными.

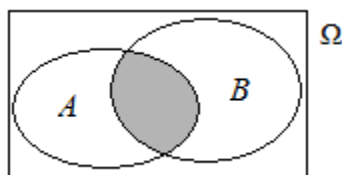


Рис.16

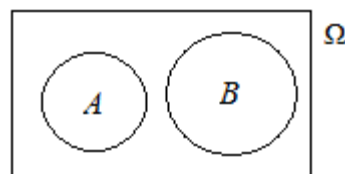


Рис.17

Событие $\bar{A}$ называется **противоположным** событию A , если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A : $A \cap \bar{A} = \emptyset$ и $A \cup \bar{A} = \Omega$ (рис.18).

Если $A \subset B$, где $A \in \Omega$, $B \in \Omega$, то говорят, что событие B является следствием события A или что A влечет за собой B (рис.19).

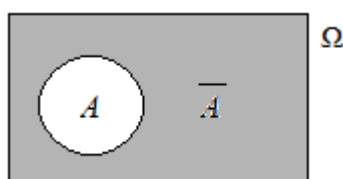


Рис.18

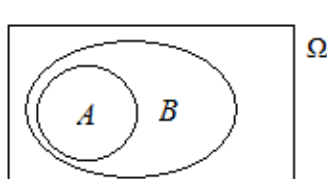


Рис.19

Изучение операций над событиями способствует развитию логической культуры учащихся. При изучении теории вероятностей практически все учащиеся – и сильные, и слабые – находятся в одинаковых условиях. Нередко бывает, что «троечники» решают задачи лучше отличников: они легко и грамотно могут сказать, в чем заключаются испытание и событие, дать более простое описание для суммы и произведения событий. Поэтому не стоит пренебрегать задачами, в которых не требуется вычислений.

Пример 1. Событие A – «попадание в мишень первым выстрелом», событие B – «попадание в мишень вторым выстрелом». В чем состоят события $A + B$, $A \cdot B$?

Решение. Событие $A + B$ или $A \cup B$ означает попадание в мишень первым или вторым выстрелами. При этом возможны следующие ситуации: попадание в мишень при первом и при втором выстрелах, попадание при первом и непопадание при втором выстрелах, непопадание при первом и попадание при втором выстрелах. Тогда событие $A + B$ означает попадание в мишень хотя бы одним выстрелом.

Событие $A \cdot B$ или $A \cap B$ означает попадание в мишень первым и вторым выстрелами.

Пример 2. Событие A означает появление шести очков при одном подбрасывании кубика. Событие $\bar{A}$ означает появление от 1 до 5 очков на верхней грани кубика.

Пример 3. Событие A состоит в том, что хотя бы одна из имеющихся 15 электрических лампочек нестандартная. Событие $\bar{A}$ означает, что все 15 лампочек стандартные.

Пример 4. Даны пары событий: 1) экзамен студентом сдан на «отлично»; сдан на «неудовлетворительно»; 2) хотя бы одна пуля при двух выстрелах попадает в цель; ни одна из двух пуль при двух выстрелах не попадает в цель.

Противоположными событиями является пара событий под номером 2.

Пример 5. Бросается игральная кость. Даны пары событий: 1) A – выпало четное число очков, B – выпало нечетное число очков; 2) A – выпало нечетное число очков, B – выпавшее число очков кратно трем; 3) A – выпало простое число очков, B – выпало четное число очков.

Несовместными событиями является пара под номером 1.

Пример 6. Из полного набора шахмат вынимается одна фигура или пешка. Какие из следующих событий являются следствием других: 1) A – выбран король, B – выбрана фигура; 2) A – выбрана черная фигура, B – выбран черный король?

Решение

1) Событие B – следствие события A , т.к. $A \subset B$.

2) Событие A – следствие B , т.к. $B \subset A$.

Пример 7. Если событие A_1 – выигрыш по билету одной лотереи, A_2 – выигрыш по билету другой лотереи, то что означают события:

$$B = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2, \quad C = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2?$$

Решение. Событие B – выигрыш только по одному билету лотереи, событие C – выигрыш хотя бы по одному билету лотереи.

§ 7. Условная вероятность. Теоремы умножения и сложения вероятностей

К понятию условной вероятности учащихся лучше подвести с помощью задач.

Задача 1. Найдите вероятность того, что разность выпавших очков при подбрасывании двух кубиков равна двум.

Решение

Испытание – один раз бросили два кубика; $s = 36$. Событие A – разность выпавших очков равна двум; $l = 8$ (рис. 20).

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

Рис. 20

Тогда $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

Задача 2. Найдите вероятность того, что разность выпавших очков при подбрасывании двух кубиков равна двум, если известно, что сумма очков равна 8.

Решение. Известно, что состоялось событие B – сумма очков равна 8. Так как у нас есть дополнительная информация, мы рассматриваем не все пространство элементарных событий, а только ту часть, которая связана с событием B (рис. 21). При этом замечаем, что случаев, благоприятствующих событию A , всего два.

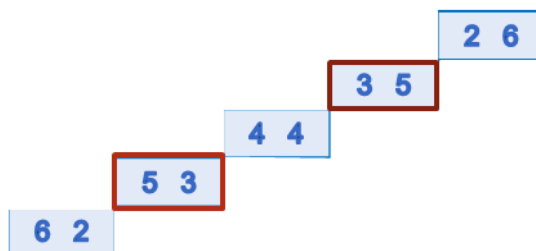


Рис. 21

Поэтому вероятность события A в этом случае равна $\frac{2}{5}$. Поскольку мы находили *вероятность события A при условии, что произошло событие B* , то и обозначим эту вероятность по-другому: $P(A/B) = \frac{2}{5}$.

По результатам решений задач 1 и 2 замечаем, что $P(A/B) \neq P(A)$. Делаем вывод, что событие A зависит от события B .

Задача 3. Найдите вероятность того, что при бросании двух монет на второй монете выпадет герб.

Решение. Испытание – две монеты бросаются один раз; $\Omega = \{\text{гг, рг, гр, рр}\}$; $s = 36$. Событие A – на второй монете выпадет герб; $A = \{\text{рг, гг}\}$; $l = 2$. Следовательно, $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Задача 4. Найдите вероятность того, что при бросании двух монет на второй монете выпадет герб, если на первой монете появился герб.

Решение. Испытание – две монеты бросаются один раз. Но так как состоялось событие B – на первой монете появился герб, то пространство

элементарных событий имеет вид: {гр, гг}. При этом событию A – на второй монете появился герб – благоприятствует только один случай. Поэтому $P(A/B) = \frac{1}{2}$.

По ответам в задачах 3 и 4 замечаем, что $P(A/B) = P(A)$. Следовательно, событие A не зависит от события B . Но о независимости событий мы могли сказать сразу, не вычисляя вероятность, поскольку очевидно, что результат подбрасывания первой монеты никак не может сказаться на результате подбрасывания второй монеты.

Решая данные задачи, мы лишь хотели понять суть понятия «условная вероятность». В дальнейшем зависимость или независимость событий мы будем определять интуитивно, исходя из условия задачи.

Следует также отметить, что независимость событий, в отличие от несовместности, невозможно изобразить на рисунке.

Перейдем к изложению основных теорем теории вероятностей.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Пример 1. Ученик выучил 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что он ответит на два поставленных вопроса?

Решение. Пусть событие A – ученик ответил на 2 вопроса. Тогда $A = A_1 A_2$, где A_1 – ученик ответил на первый вопрос, A_2 – ученик ответил на второй вопрос. Вычислим вероятность события A :

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} = \frac{19}{30}.$$

Если события A и B независимы, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример 2 (прототип задач ЕГЭ). В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение. Введем обозначения: A_1 – первый продавец занят, A_2 – второй продавец занят, A_3 – третий продавец занят. Эти события независимы, так как в условии сказано, клиенты заходят независимо друг от друга. Тогда событие $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ означает, что три продавца заняты одновременно. Вычислим вероятность: $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,216$.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместной реализации:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Данную теорему очень легко пояснить на языке площадей для двух пересекающихся множеств (рис. 14).

Если события A и B несовместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$ (рис.15).

Из рисунка 18 легко можно сделать вывод, что *сумма вероятностей противоположных событий равна 1*:

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

✿ *Если в условии задачи событие описывается с помощью словосочетания «хотя бы один ...», то сначала следует описать противоположное событие и найти его вероятность, а затем найти вероятность исходного события.* ✿

Пример 3. Какова вероятность того, что наугад выбранное число будет кратно двум или пяти?

Решение. Пусть событие A – наугад выбранное число кратно двум; событие B – наугад выбранное число кратно пяти. Тогда событие AB – наугад выбранное число кратно десяти. По теореме сложения вероятностей получим:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}.$$

Пример 4 (прототип задач ЕГЭ). По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение. Введем обозначения: событие A – товар доставлен из магазина А, событие B – товар доставлен из магазина Б. Тогда событие $\bar{A}$ – товар не доставлен из магазина А, событие $\bar{B}$ – товар не доставлен из магазина Б. Эти события независимы, так как в условии сказано, что магазины работают независимо друг от друга. Событие $\bar{A} \cdot \bar{B}$ означает, что ни один магазин не доставил товар. Найдём вероятность этого события:

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,9) = 0,02.$$

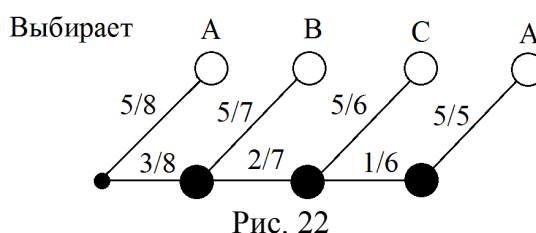
При решении задач на сложение и умножение вероятностей не всегда бывает удобно вводить обозначения событий, а потом расписывать вычисление вероятностей. Иногда вероятности легче вычислять через площади соответствующих областей, тогда бывают необходимы иллюстрации с помощью кругов и прямоугольников.

Геометрические иллюстрации применяются, если в задаче речь идет об одном испытании. Если же в условии говорится о цепочке испытаний, то лучше использовать веточки дерева вероятностей или комбинацию событий в буквенных обозначениях.

Пример 5. Трое игроков по очереди извлекают по одному шару из урны, содержащих пять белых и три черных шара. Побеждает тот, кто первый извлечет белый шар. Игрок А тянет первым, В – вторым, затем С, потом опять А и т.д. В каком отношении находятся шансы игроков?

Решение

Если решать задачу, вводя обозначения событий, то решение будет громоздким. Поскольку речь в условии задачи идет о цепочке испытаний, воспользуемся деревом вероятностей, которое показывает возможные пути развития ситуации (рис. 22).



При построении дерева проводим следующие рассуждения. Сначала отмечаем исходную точку, затем от нее проводим два отрезка к двум возможным состояниям: игрок А выбрал белый шар, игрок а выбрал чёрный шар. Если игрок А выбрал белый шар, то он выиграл, другим игрокам больше не нужно выбирать шары. Именно поэтому от состояния с белым шаром отрезки проводить не нужно. Если же игрок А выбрал черный шар, то игра продолжается для игрока В и т.д. Над отрезками подписываем вероятности. Так как поначалу имеется 5 шаров, то вероятность выбрать белый шар для игрока А равна $5/8$, чёрный – $3/8$. После выбора черного шара игроком А осталось 7 шаров, из них черных – 2. Таким образом, над остальными отрезками указываются *условные вероятности* с учетом числа оставшихся шаров.

После того, как дерево построено, переходят к вычислению вероятностей интересующих событий.

Когда «идём» по одной ветке, вероятности перемножаем, когда переходим на другую ветку, то ставим знак сложения, поскольку переход на другую ветку означает альтернативный вариант, которому соответствует логическая связка – союз «или». Вычислим вероятности выигрыша для каждого игрока:

$$P(A) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{36}{56}, \quad P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}, \quad P(C) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}.$$

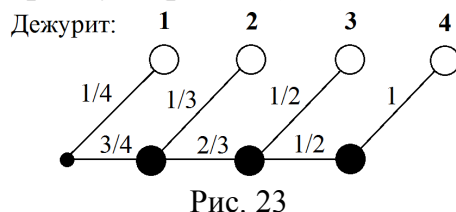
Приходим к выводу, что шансы игроков относятся как 36:15:5. Такая игра явно несправедливая.

Пример 6. Четверо определяют дежурного по классу с помощью четырёх спичек, одна из которых короче остальных. В равных ли условиях находятся играющие?

Решение. Прежде чем решать задачу, следует предложить учащимся высказаться, что подсказывает им интуиция. Можно сослаться на присутствие

такого типа жеребьевки в сюжетах различных произведений и в жизни. Могли часто встречаться такой способ выбирать жребий, если он несправедливый?

Решим задачу по аналогии с предыдущей. Чёрный кружок будет означать длинную спичку, белый – короткую (рис. 23).



Найдем вероятности дежурить для каждого игрока.

$$P_1 = \frac{1}{4}, \quad P_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, \quad P_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Все вероятности равны, следовательно, играющие изначально находятся в равных условиях.

Рассмотрим некоторые задачи из открытого банка задач для подготовки к ЕГЭ (www.mathege.ru).

Задача 1. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

В ходе решения данной задачи, учащиеся отвечают на следующие вопросы учителя: зависит ли результат каждого выстрела от предыдущего? Какова вероятность попадания и промаха? С помощью какой формулы вычисляется вероятность данного события?

Решение. Результат каждого события не зависит от предыдущего. Поэтому события «попал при первом выстреле», «попал при втором выстреле» и так далее независимы. Вероятность каждого попадания равна 0,5, отсюда следует, что и вероятность промаха равна 0,5. Для решения данной задачи необходимо воспользоваться формулой умножения вероятностей независимых событий. Получаем, что событие

$A = \{\text{попал, попал, попал, промах, промах}\}$

имеет вероятность $P(A) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \approx 0,03$.

Задача 2. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение. Введем обозначения: A_1 – первая батарейка бракованная, A_2 – вторая батарейка бракованная. Тогда $\overline{A_1}$ – первая батарейка исправна, $\overline{A_2}$ – вторая батарейка исправна. По условию, $P(A_1) = P(A_2) = 0,06$. Событие $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$ означает, что обе батарейки исправны. Вычислим вероятность:

$$P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = (1 - 0,06) \cdot (1 - 0,06) =$$

= 0,8836.

При решении задачи следует обратить внимание учащихся на то, что вероятности исправности обеих батареек равны.

Следующая задача может быть решена двумя способами: с помощью теоремы умножения вероятностей и с помощью дерева вероятностей. Рассмотрим оба способа решения.

Задача 3. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Первый способ решения. Событие – гроссмейстер А. выиграет белыми и черными фигурами. Логическая связка – союз «и» – указывает на произведение событий: «гроссмейстер выиграл черными фигурами», «гроссмейстер выиграл белыми фигурами». Так как вероятности этих событий известны, то

$$P = 0,52 \cdot 0,3 = 0,156.$$

Второй способ решения (посложнее). Построим дерево вероятностей (рис. 24). Когда «идем» по одной ветке, вероятности перемножаем, когда переходим на другую ветку, то ставим знак сложения, поскольку переход на другую ветку означает альтернативный вариант, которому соответствует логическая связка – союз «или»:

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,52 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,52 = 0,156.$$

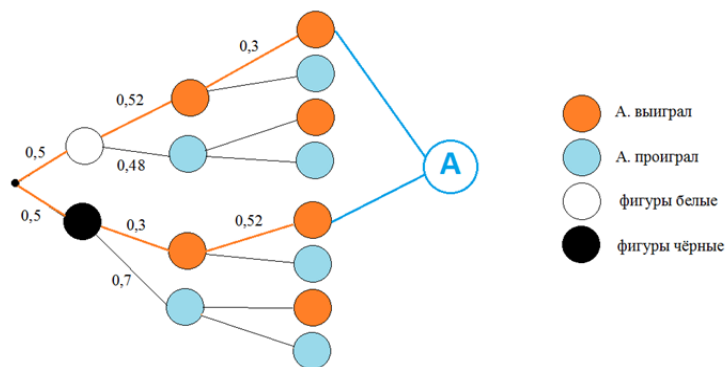


Рис. 24

Задача 4. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение

1 способ. Пусть событие B – хотя бы один автомат исправен. Тогда данное событие можно представить в виде:

$$B = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2,$$

где A_1, A_2 – исправны первый и второй автоматы соответственно. По условию, $P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = 0,05$. Тогда $P(A_1) = P(A_2) = 0,95$.

Событие B представлено в виде комбинации суммы несовместных событий и произведения независимых событий, поэтому вероятность суммы

равна сумме вероятностей, а вероятность произведения равна произведению вероятностей:

$$P(B) = 0,95 \cdot 0,05 + 0,05 \cdot 0,95 + 0,95 \cdot 0,95 = 0,9975.$$

Заметим, что данный способ решения не является громоздким. Но было бы иначе, если бы по условию задачи имелось не два автомата, а три или больше. Как в таком случае можно было бы решить задачу? Ученикам следует напомнить, что если в формулировке события присутствуют слова «хотя бы один», то вероятность этого события проще находить через вероятность противоположного события.

2 способ. Если событие B – хотя бы один автомат исправен, то событие $\bar{B}$ – оба автомата неисправны. Тогда $\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$, $P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,05 \cdot 0,05 = 0,0025$;
 $P(B) = 1 - 0,0025 = 0,9975.$

Задача 5. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение можно выполнить с опорой на геометрическую иллюстрацию (рис. 25). Так как нет вопросов, которые одновременно относятся к двум темам, то события изображаем как несовместные. Находим вероятность: $P(A) = 0,2 + 0,15 = 0,35.$

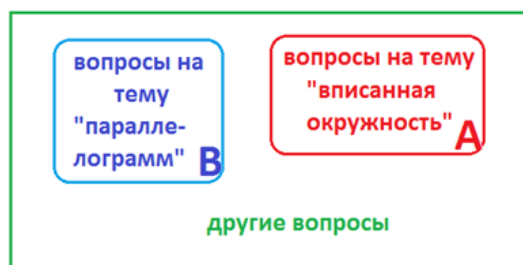


Рис. 25

Задача 6. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение данной задачи будет наиболее понятно, если его проиллюстрировать (рис. 26). Прямоугольник соответствует испытанию – работа двух автоматов. Каждый овал иллюстрирует событие – в автомате закончится кофе. Так как автоматов два, то и овала тоже два. Поскольку кофе может закончиться в обоих автоматах, то овалы необходимо нарисовать с пересечением. Далее расставляем на рисунке соответствующие вероятности (площади). По условию, площадь пересечения овальных областей (вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах) равна 0,12, а площадь одной целой овальной области (вероятность того, что кофе

закончится в одном автомате) равна 0,3. Событию – к концу дня кофе останется в обоих автоматах – соответствует на рисунке закрашенная область. Нас интересует площадь закрашенной фигуры. Найдем её:

$$P = 1 - 0,18 - 0,12 - 0,18 = 0,52.$$

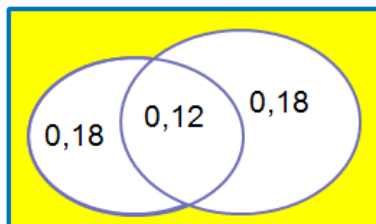


Рис. 26

Рассмотрим еще одну задачу, решаемую с помощью геометрической иллюстрации.

Задача 7. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение становится очевидным, если обратиться к рисунку 27. С помощью двух овалов изображены события: чайник прослужит больше года, чайник прослужит больше двух лет. Это пример, когда одно событие является следствием другого. Область между двумя овалами означает, что чайник прослужил больше года, но не больше двух лет. Площадь этой области нам и нужно найти.

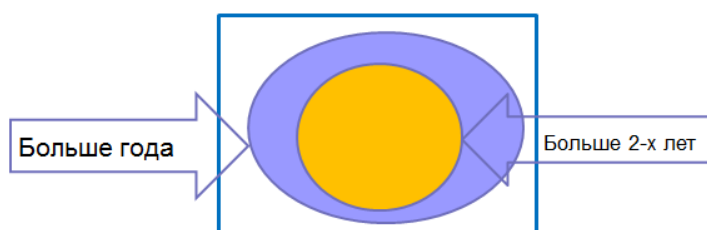


Рис. 27

$$P = 0,97 - 0,89 = 0,08.$$

§ 8. Формула полной вероятности

Формула полной вероятности является следствием теорем умножения и сложения вероятностей. Но не во всех школьных учебниках она рассматривается. Если мы решаем задачу с помощью дерева вероятностей, то в самой формуле нет необходимости, учащиеся могут решать задачи и без формулы. Но если формула в учебнике дана, то её придется изучать.

Пусть некоторое событие A может произойти с одним из событий несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих пространство

элементарных событий (рис. 28). Будем эти события называть гипотезами. Тогда

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$$

или кратко

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Чтобы эту формулу учащиеся запомнили, следует её доказать. Доказательство проведем с помощью рис. 27.

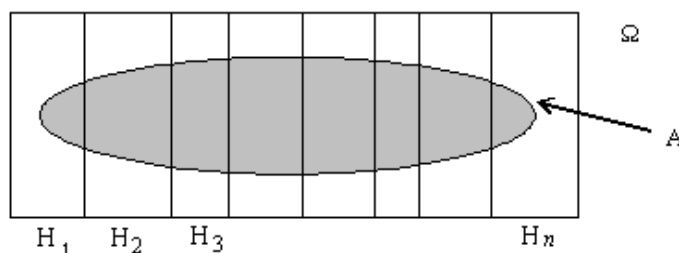


Рис.27

Так как гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ в объединении составляют все пространство Ω , то событие A может появиться только в комбинации с какой-либо из этих гипотез (мы помним что сумма событий соответствует объединению множеств, а произведение – пересечению множеств):

$$A = H_1 A + H_2 A + \dots + H_n A.$$

Поскольку гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ несовместны, то и комбинации $H_1 A, H_2 A, \dots, H_n A$ также несовместны (на рис. 27 соответствующие области не пересекаются); применяя к ним теорему сложения, получим:

$$P(A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \dots + P(H_n A) = \sum_{i=1}^n P(H_i A).$$

Применяя к каждому событию $H_i A$ теорему умножения, получим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i),$$

что и требовалось доказать.

☞ Так как гипотезы являются несовместными событиями, а их объединение совпадает с Ω , то сумма вероятностей всех гипотез равна 1. ☞

А теперь попробуем вспомнить, не встречались ли мы ранее с похожей иллюстрацией? Вспомним задачу 12 из параграфа 5.

«Задача 12». Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решим ещё раз эту задачу. Для этого выполним чертеж к этой задаче в соответствии с новыми обозначениями (рис. 28).



Рис. 28

Испытание – покупка яйца. Событие A – куплено яйцо высшей категории. По условию задачи $P(A) = 0,35$.

Так как яйца агрофирме поставляют только два хозяйства, то и гипотез будет две: H_1 – куплено яйцо из первого хозяйства, H_2 – куплено яйцо из второго хозяйства. Так как гипотезы в объединении дают нам все пространство Ω , то можно ввести обозначения: $P(H_1) = x$, $P(H_2) = 1 - x$. Нам нужно найти $P(H_1)$.

В условии сказано, что 40% яиц из первого хозяйства высшей категории. Это означает, что вероятность купить яйцо высшей категории при условии, что оно из первого хозяйства, равна 0,4: $P(A/H_1) = 0,4$. Аналогично, вероятность купить яйцо высшей категории при условии, что оно из второго хозяйства, равна $P(A/H_2) = 0,2$.

Так как гипотезы две, то и слагаемых в формуле полной вероятности будет два:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2).$$

Подставим в формулу все полученные вероятности:

$$0,35 = 0,4x + 0,2(1 - x).$$

Решая полученное уравнение, находим

$$x = P(H_1) = 0,75.$$

Стандартными задачами, при решении которых используется формула полной вероятности, являются задачи с урнами и шарами. Рассмотрим пример такой задачи.

Пример 1. Имеются три одинаковые на вид урны; в первой урне 2 белых и 1 черный шар, во второй – 3 белых и 1 черный, в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найдите вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Испытание – выбор шара. Событие A – выбран белый шар.

Мы понимаем, что вероятность выбора белого шара зависит от того, какую урну мы выберем. Так всего три урны, то и гипотез будет три: H_1 – выбор первой урны; H_2 – выбор второй урны; H_3 – выбор третьей урны.

Так как урны по условию задачи неотличимы, то гипотезы равновозможны, а так как их всего три и сумма вероятностей гипотез равна 1, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$.

Так как в первой урне 2 белых и 1 черный шар, то вероятность выбора белого шара при условии, что была выбрана первая урна, равна $P(A/H_1) = \frac{2}{3}$.

Аналогично рассуждая, находим $P(A/H_2) = \frac{3}{4}$, $P(A/H_3) = \frac{1}{2}$.

В данном случае формула полной вероятности имеет три слагаемых:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3).$$

Подставляя найденные вероятности в формулу, получим:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{36}.$$

Предложим ученикам порассуждать на тему сдачи экзаменов. Уже давно ученики школ не сдают экзамены по билетам. Представим, что ученики стали студентами и пришли на экзамен. Будут ли зависеть шансы сдать экзамен от того, каким по очереди студент выбирает билет?

Пример 2. Студент выучил к экзамену 25 билетов из 30. Когда у него шансы сдать экзамен больше: когда он выбирает билет первым или вторым?

Решение. Испытание – студент сдаёт экзамен. Событие A – студент сдал экзамен.

Если студент выбирает билет первым, то

$$P(A) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Рассмотрим случай, когда студент выбирает билет вторым. Тогда имеются две гипотезы:

H_1 – первый студент взял билет, который второй студент знает;

H_2 – первый студент взял билет, который второй студент не знает.

Вероятности гипотез находим из условия задачи:

$$P(H_1) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}, \quad P(H_2) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Если первый студент взял билет, который второй студент знает, то из оставшихся 29 билетов второй студент знает 24. Следовательно, $P(A/H_1) = \frac{24}{29}$.

Если первый студент взял билет, который второй студент не знает, то из оставшихся 29 билетов второй студент, по-прежнему, знает 25. Следовательно, $P(A/H_2) = \frac{25}{29}$. По формуле полной вероятности для двух слагаемых получим:

$$P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{24}{29} + \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{29} = \frac{5}{6}.$$

Видим, что шансы сдать экзамен равны.

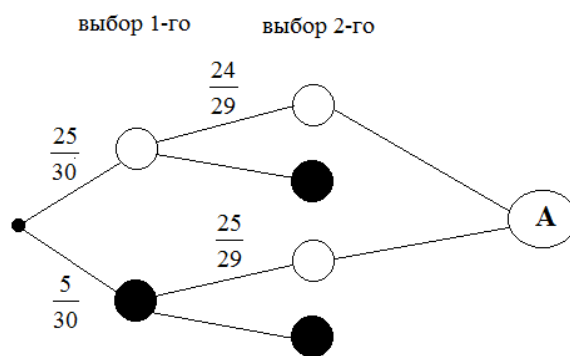


Рис. 29

Эту же задачу (как, впрочем, и предыдущую) можно решить с помощью дерева вероятностей. Пусть чёрный круг означает, что выбран билет, который второй студент не знает, а белый круг означает, что выбран билет, который второй студент знает. Тогда дерево вероятностей принимает вид на рис. 29.

По рисунку получим тот же результат:

$$P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{24}{29} + \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{29} = \frac{5}{6}.$$

Заметим, что решение задачи с помощью дерева вероятностей является более простым. Поэтому в классах с изучением математики на базовом уровне формулу полной вероятности можно не рассматривать. Учащиеся профильных классов при выборе способов решения задачи скорее всего, предпочтение отдадут тоже вероятностному дереву. Построение вероятностного дерева после нескольких упражнений, как правило, не вызывает затруднений. Желательно добиваться того, чтобы дерево было структурировано относительно порядка действий. Действия на рисунке «разворачиваются» слева направо, так же как читаются слова. Например, на рис. 29 мы мысленно делим лист по ширине на вертикальные полосы, соответствующие выбору первого и выбору второго студента; под словами «выбор первого» изображаются только варианты выбора первого студента, а под словами «выбор второго» - только варианты выбора второго студента.

Пример 3 (Задача ЕГЭ). Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Испытание – покупка стекла, событие A – купленное стекло оказалось бракованным.

Построим дерево вероятностей (рис. 30).

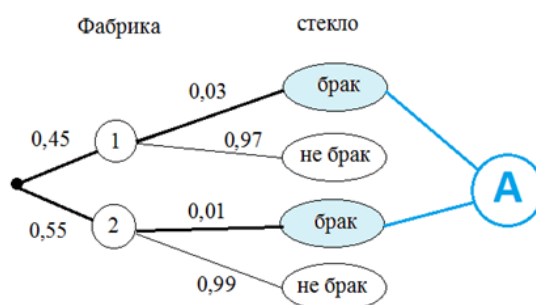


Рис. 30

По дереву находим вероятность события A :

$$P(A) = 0,45 \cdot 0,03 + 0,55 \cdot 0,01 = 0,019.$$

Пример 4. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение. Испытание – Ковбой Джон стреляет в муху. Событие A – ковбой Джон промахнулся. Действия разворачиваются в следующем порядке: сначала ковбой хватается пистолет, затем ковбой стреляет в муху. Дерево вероятностей изображено на рисунке 31.

Найдем вероятность того, что ковбой Джон промахнется:

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,52.$$

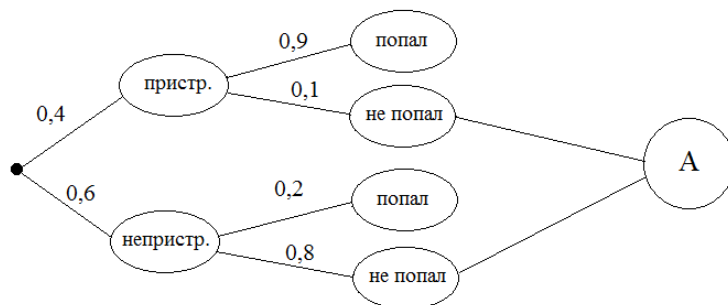


Рис. 31

☞ При изучении данной темы учащимся можно предложить для обсуждения некоторые ситуации. ☞

Ситуация 1

Один химик, который часто летал в командировки на самолёте, однажды узнал, что якобы на 10000 рейсов приходится один такой, что кто-то везёт с собой бомбу. Событие A – в самолёте бомба – рискованно назвать практически невозможным, ведь речь идет о жизни. Химик рассудил: «Вероятность того, что в самолёте окажутся сразу две бомбы, равна $0,0001 \cdot 0,0001 = 0,00000001$. Это число пренебрежимо мало. Поэтому я изготовил бомбу и всегда вожу её в портфеле».

В чём ошибка химика?

Ситуация 2

Эдгар По в произведении «Мари Роже» пишет: «... обычного читателя почти невозможно убедить, что при игре в кости двукратное выпадение шестерки делает почти невероятным выпадение её в третий раз и даёт все основания поставить против этого любую сумму. Заурядный интеллект ... не может усмотреть, каким образом два броска, принадлежащие уже прошлому, могут повлиять на бросок, существующий ещё пока только в будущем. Возможность выпадения шестёрки кажется точно такой же, как и в любом случае... Суть скрытой тут ошибки – грубейшей ошибки – я не могу объяснить в пределах места, предоставленного мне здесь...».

В чём ошибка Э. По?

В каждой из ситуаций находится вероятность уже случившегося события! Химик уже везёт с собой бомбу, поэтому вероятность этого события равна 1, а не 0,0001. Эдгар По считает, что после того, как выпали две шестерки, третья шестерка уже вряд ли выпадет. Но если два броска уже в прошлом, то мы не можем говорить о вероятности появившихся шестерок. Если бы мы только начинали эксперимент, то вероятность выпадения трёх шестерок (пока кубики не брошены!) действительно мала, она равна $\frac{1}{216}$. Но поскольку два броска в прошлом, они не могут повлиять на третий бросок (у кубика нет памяти), и вероятность того, что в третий раз выпадет шестерка, равна $\frac{1}{6}$.

Отсюда следует вывод, что вероятности вычисляются только в условиях случайного эксперимента. Если событие произошло, то его вероятность не может быть равна числу, которое мы ожидали до проведения эксперимента. Этот же принцип работает в обеспечении безопасности эксплуатации различных технических систем. В сложных технических устройствах системы жизнеобеспечения продублированы. Например, в автомобилях существуют две тормозные системы: рабочая и дублирующая. Дублирующая система может работать независимо от рабочей, она используется для страхования при отказе рабочей системы. Допустим, вероятность выхода из строя каждой системы равна 0,0001. Тогда вероятность того, что из строя выйдут сразу обе системы, равна 0,00000001. Но если одна система уже вышла из строя, вероятность аварии многократно возрастает – в данном случае в 10000 раз. Поэтому не стоит пренебрегать ремонтом, откладывая его на потом, поскольку это может стоить жизни. По этой же причине из-за незначительных поломок возвращаются в аэропорты самолёты.

§ 9. Основные теоремы и вероятностное дерево в задачах ЕГЭ

Вероятностное дерево при решении задач на вычисление вероятности может быть полным или неполным. В одних случаях мы должны учитывать

все возможные ситуации согласно условию задачи (как это делали в предыдущем параграфе), в других – достаточно рассмотреть только отдельные ветки дерева.

Рассмотрим прототипы задач ЕГЭ из открытого банка задач (www.mathege.ru).

Задача 1. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение. Испытание – команда играет две игры. Событие A – команда вышла в следующий круг соревнований (набрала в сумме не меньше 4 очков).

При решении задачи нам придётся учесть все случаи, поэтому дерево будет полным (рис. 32). При изображении состояний вместо слова «выигрыш» запишем «3 очка», вместо слова «ничья» – «1 очко», вместо слова «проигрыш» – «0 очков».

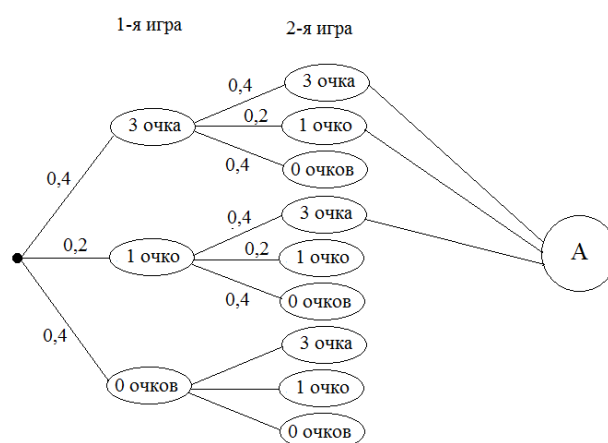


Рис. 32

Так как в условии сказано, что вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4, вероятность ничьей будет равна $1 - 0,4 - 0,4 = 0,2$.

Найдем вероятность события A :

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,32.$$

Задача 2. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что З. сможет поступить:

- а) хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей;
 б) на одну из специальностей.

Решение. Если для решения задачи мы будем строить полное дерево с учетом всех возможных ситуаций, то чертёж получится громоздкий. Поскольку и математика, и русский язык должны быть сданы успешно, то ситуации, когда абитуриент набрал меньше необходимого количества баллов по этим предметам, мы рассматривать не будем. Знак «+» означает, что экзамен сдан успешно, знак «-» - баллов недостаточно. Экзамены сдаются в определенной последовательности. Предположим, что сначала была сдана математика, затем русский язык. После был сдан иностранный язык и обществознание (рис. 33).

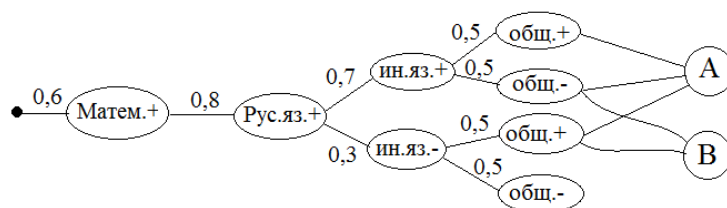


Рис. 33

1) Событие A – абитуриент 3. поступит хотя бы на одну из двух специальностей (на одну или на две). Тогда по рис.33 имеем:

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,5 + \\ + 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = \\ = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,5 \cdot (0,7 + 0,7 + 0,3) = 0,408.$$

2) Событие B – абитуриент 3. поступит на одну из специальностей (только на «коммерцию» или только на «лингвистику»).

$$P(B) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = \\ = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,5 \cdot (0,7 + 0,3) = 0,24.$$

Задача 3. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение. Построим дерево вероятностей, на котором отметим возможные состояния погоды с 3 июля по 6 июля. (рис. 34).

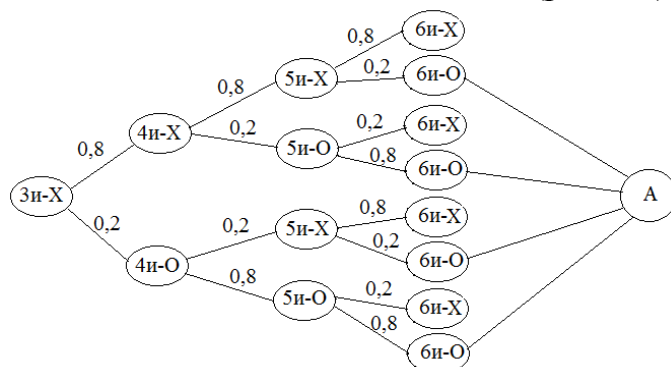


Рис. 34

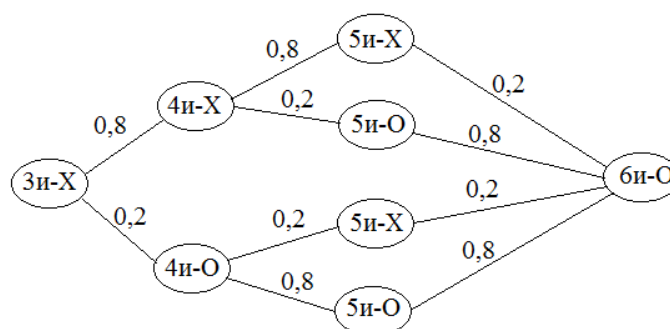


Рис. 35

Заметим, что дерево получилось громоздкое. Так как 6 июля должна быть отличная погода, то состояния хорошей погоды в этот день можно не рассматривать, при этом можно «склеить» состояния отличной погоды 6 июля (рис. 35). Дерево на рис. 35 выглядит проще.

$$P(A) = P(6иО) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + \\ + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,392.$$

Задача 4. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение. Испытание – пациент сдает анализ. Событие A – результат анализа оказался положительным. Вероятность положительного результата зависит от состояния здоровья пациента. Сначала пациент обращается к врачу, при этом он может быть здоровым, а может быть больным. Затем пациент сдает анализ, результат которого может быть положительным или отрицательным. Представим ситуацию с помощью дерева (рис. 36).

По рис. 36 найдем вероятность события A :

$$P(A) = 0,05 \cdot 0,9 + 0,95 \cdot 0,01 = 0,0545.$$

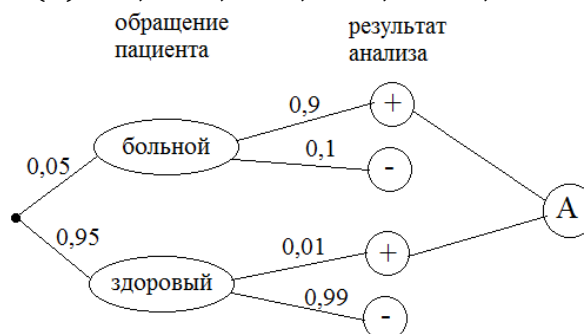


Рис. 36

Задача 5. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Построим вероятностное дерево (рис.37) и вычислим вероятность.

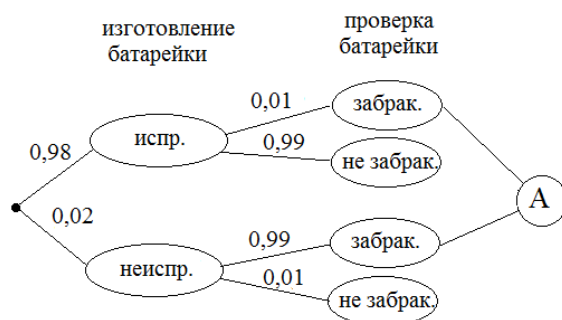


Рис. 37

$$P(A) = 0,98 \cdot 0,01 + 0,02 \cdot 0,99 = 0,0296.$$

Задача 6. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

Решение. При решении этой задачи нет необходимости строить все вероятностное дерево. В условии описана цепочка событий, соответствующая одной ветке. Изобразим эту ветку (рис. 38).

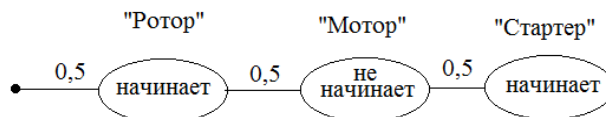


Рис. 38

Так как в условии сказано, что жребий честный, то вероятности начинать или не начинать игру одинаковы и равны по 0,5. Тогда $P = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125$.

Задача 7. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Решение. Данная задача отличается от других задач постановкой вопроса. Если в предыдущих задачах требовалось вычислить вероятность какого-то события, то в этой задаче вероятность уже известна.

1 способ. Изобразим вероятностное дерево (рис. 39). Знаком «+» отметим попадание, знаком «-» — промах. Если выстрел достиг цели, то испытания заканчиваются, если нет — продолжаются. Поэтому дерево можно продолжать неограниченно.

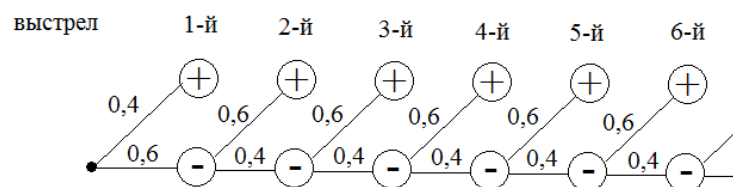


Рис. 39

Будем вычислять вероятности поражения цели с количеством выстрелов, не превышающих одного, двух, трёх и т.д., пока не получим вероятность не менее 0,98 (P_k — вероятность попасть, сделав не более k выстрелов):

$$P_1 = 0,4;$$

$$P_2 = 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 = 0,76;$$

$$P_3 = 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,904;$$

$$P_4 = 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + \\ + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,9616;$$

$$P_5 = 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + \\ + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,98464.$$

Так как $P_5 \geq 0,98$, то автоматической системе нужно сделать не более пяти выстрелов.

Заметим, что рассмотренный способ решения задачи требует большого количества вычислений. Решим задачу иначе.

2 способ. Если вероятность уничтожения цели не менее 0,98, то вероятность не уничтожить цель не более 0,02 (как вероятность противоположного события). Поэтому нам проще работать с «цепочкой», изображённой на рис. 40.

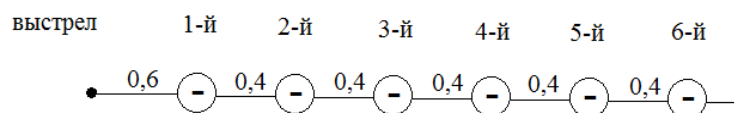


Рис. 40

Вычислим вероятность того, что цель после k выстрелов не будет поражена:

$$P_1 = 0,6;$$

$$P_2 = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24;$$

$$P_3 = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,096;$$

$$P_4 = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,0384;$$

$$P_5 = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,01536.$$

Таким образом, вероятность того, что цель не будет уничтожена при пяти выстрелах, оказалась не более 0,02. Следовательно, вероятность уничтожения цели при пяти выстрелах не менее 0,98. Ответ: 5.

Задача 8. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу С (рис. 41).

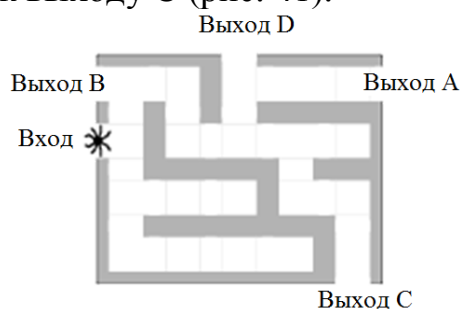


Рис. 41

Решение. Дополним рис. 41 разметкой движения паука к выходу С, отмечая точки, в которых пауку нужно сделать выбор (рис. 42). Пауку придется четыре раза сделать выбор, причём вероятности пойти в нужном направлении, судя по рисунку, во всех точках равны 0,5. Следовательно, вероятность того, что паук придёт к выходу С, будет равна:

$$P = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625.$$

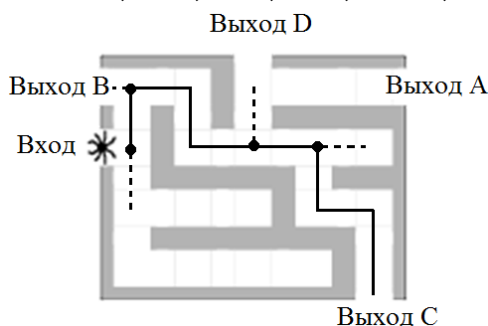


Рис. 42

При решении задачи мы воспользовались траекторией движения как вероятностным деревом.

§ 10. Геометрическая вероятность

Цель изучения темы «Геометрическая вероятность» - знакомство учащихся с ещё одним способом вычисления вероятности. С методической точки зрения геометрическую вероятность иногда используют для формирования представления о более сложных событиях, событиях составленных из бесконечного множества элементарных событий. Однако на этом пути много сложностей. Вообще, место этой темы в теории вероятностей

– после темы «Аксиоматическое определение вероятности», в которой рассматривается теорема о непрерывной зависимости вероятности события от самого события. В школьном курсе математики аксиоматическое определение вероятности не рассматривается в силу сложности его восприятия и недостаточной математической базы учащихся. Поэтому материал о геометрической вероятности занимает отчасти изолированное место в школьном курсе теории вероятностей и больше служит для повторения уже пройденного и закрепления навыков формализации текстовых вероятностных задач с помощью геометрических фигур. В принципе, учащиеся не склонны задавать вопросы методологического характера по этой теме в силу недостаточной осведомленности глубины материала.

Рассмотрим определение геометрической вероятности и несколько примеров.

Пусть на плоскости задана некоторая область – множество Ω и его подмножество A (рис. 43). В область Ω наудачу бросается точка. В качестве исходного положения примем то, что вероятность попадания случайной точки в любую часть области пропорциональна площади этой части области и не зависит от ее расположения и формы.

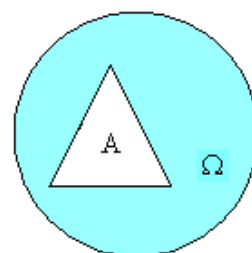


Рис.43

Рассмотрим событие: A – наудачу брошенная точка попала в область A .

Тогда вероятность события A определяется отношением (для рис. 43):

$$P(A) = \frac{\text{площадь } A}{\text{площадь } \Omega}.$$

Вообще, в качестве Ω можно рассматривать часть прямой или часть пространства. Тогда в определении вероятности используются длины или объемы.

Геометрический подход к вероятности события не зависит от вида измерений данного пространства: важно только, чтобы пространство элементарных событий Ω и подпространство, представляющее событие A , были бы одинакового вида и одинаковых измерений. Поэтому в общем виде формула геометрической вероятности имеет вид:

$$P(A) = \frac{\text{геометрическая мера } A}{\text{геометрическая мера } \Omega}.$$

Рассмотрим наиболее простой пример с использованием формулы геометрической вероятности.

Пример 1. На паркетный пол падает монета диаметром 2 см. Определить вероятность того, что монета не пересечет края дощечек, если длина дощечки 23 см, а ширина – 5 см.

Решение. Решим задачу с помощью рис. 44.

Испытание состоит в бросании монеты на дощечку паркета, которое можно интерпретировать как бросание точки – центра монеты – в

прямоугольник Ω размерами 23×5 . Событие A – «монета не пересекла края дощечки» или «центр монеты упал в прямоугольник A размерами 21×3 ».

По формуле получим искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{21 \cdot 3}{23 \cdot 5} = 0,5478. \quad \square$$

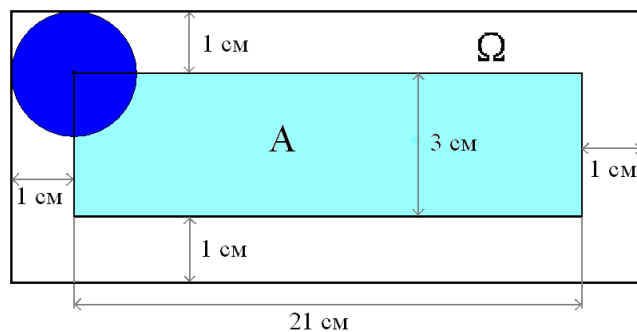


Рис.44

В следующем примере из условия явно не следует, что можно использовать формулу геометрической вероятности.

Пример 2. В соответствии с заданием на полет экипажам двух самолетов необходимо передать одно донесение по радио в любое время в период от 10 часов 10 минут до 10 часов 25 минут. Для передачи донесения требуется 3 минуты. Чему равна вероятность того, что экипаж одного самолета начнет передачу донесения тогда, когда экипаж другого самолета передачу своего донесения еще не закончит?

Решение. По условию, донесения должны быть полностью переданы с 10 часов 10 минут до 10 часов 25 минут. Обозначим через x момент времени, в который начал передачу сообщения первый экипаж, а через y – момент времени, в который начал передачу сообщения второй экипаж. Так как донесение передается в течение трех минут, то начало донесения должно приходиться на момент времени от 10 часов 10 минут до 10 часов 22 минут, то есть начать донесение можно в течение 12 минут. Тогда пространство элементарных событий (множество точек с координатами (x, y)) описывается системой неравенств:

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}.$$

Пусть событие A означает, что экипаж одного самолета начал передачу донесения тогда, когда экипаж другого самолета передачу своего донесения еще не закончил. Тогда событие A , являясь подмножеством пространства Ω , описывается совокупностью неравенств:

$$A: \begin{cases} x \leq y \leq x + 3 \\ y \leq x \leq y + 3 \end{cases}.$$

Изобразим множества, соответствующие событию A и пространству элементарных событий Ω , в системе координат (рис.45).

Выбор времени начала передачи сообщения обоими экипажами равносильно бросанию точки в квадрат Ω . Координаты брошенной точки являются случайными: первая координата – момент начала передачи сообщения первым экипажем, вторая координата – вторым экипажем. Попадание точки в область A означает, что экипаж одного самолета начнет передачу донесения тогда, когда экипаж другого самолета передачу своего донесения еще не закончит.

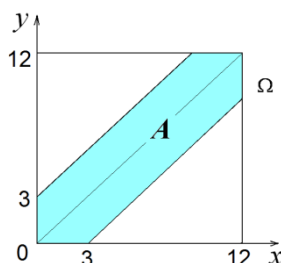


Рис. 45

Найдем площади соответствующих множеств:

$$S(\Omega) = 12 \cdot 12 = 144,$$

$$S(A) = 144 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (12 - 3)^2 = 63.$$

По формуле получим искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{63}{144} = 0,437.$$

Аналогичным способом решаются все задачи на вычисление вероятности встречи.

Следующий пример показывает, как можно использовать геометрическое определение вероятности в практических задачах.

Пример 3. На шахматную доску 100 раз бросили монету радиусом 1 см. В 64 случаях монета целиком оказывалась внутри какой-нибудь клетки. Оцените размер одной клетки шахматной доски.

Решение. Изобразим клетку шахматной доски (рис. 46), а внутри клетки – область, в которую должен упасть центр монеты, чтобы монета не пересекала края клетки (как в примере 1). Обозначим длину стороны шахматной клетки через x .

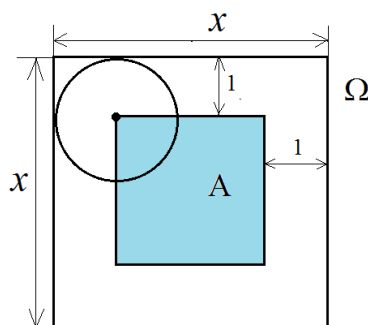


Рис. 46

Испытание – бросание центра монеты в шахматную клетку, событие A – центр монеты попал в закрашенную область A . По формуле геометрической вероятности получим:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{(x-2)^2}{x^2}.$$

С другой стороны, нам известно, что монету бросили 100 раз в 64 случаях она целиком оказывалась внутри клетки. Тогда относительная частота события A равна $P^*(A) = \frac{64}{100}$. Так как из статистического определения следует, что $P^*(A) \approx P(A)$, то получаем приближенное равенство

$$\frac{(x-2)^2}{x^2} \approx \frac{64}{100},$$

из которого находим, что $x \approx 10$. Тогда размеры шахматной клетки приблизительно равны 10×10 см.

В открытом банке заданий ЕГЭ задачи на геометрическую вероятность – одни из самых простых.

Задача. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1 час.

Решение. На рис. 47 представлен циферблат.

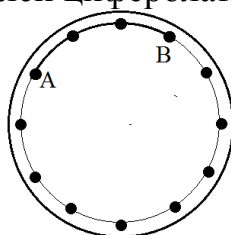


Рис. 47

Испытание – бросание точки (конца часовой стрелки) на окружность; событие A – точка попала на дугу AB .

Тогда формула геометрической вероятности примет вид:

$$P(A) = \frac{\text{длина дуги } AB}{\text{длина окружности}}.$$

Так как длина дуги AB составляет четвертую часть длины всей окружности, то $P(A) = \frac{1}{4} = 0,25$.

§ 11. Формула Бернулли

Тема эта очень важна и сама по себе, и с точки зрения перспектив дальнейшего изучения теории вероятностей. Схема Бернулли применяется в очень многих статистических исследованиях. При изучении этой темы с учащимися можно проводить различные беседы, касающиеся приложений

теории вероятностей к другим дисциплинам. Следует заметить, что к этому времени учащиеся должны быть знакомы с формулой числа сочетаний.

Прежде чем рассматривать формулу Бернулли, мы рассмотрим задачу из открытого банка заданий ЕГЭ.

Задача 1. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Решение. Построим вероятностное дерево.

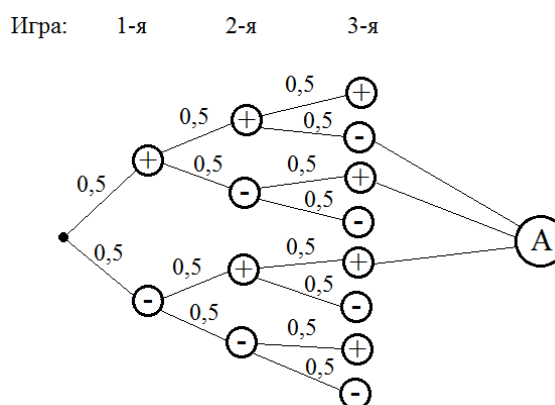


Рис. 48

Выигрыш жребия будем обозначать знаком «+», проигрыш – знаком «-» (рис. 48). Испытание – 3 раза разыгрывается жребий. Событие A – «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Имеем:

$$P(A) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,375.$$

Мы построили достаточно большое вероятностное дерево, хотя жеребьёвка проводилась только три раза. Но если бы жеребьёвка проводилась, например, пять или семь раз, то решение задачи с помощью дерева было бы затруднительным. Возникает задача поиска более простого и удобного способа вычисления вероятности.

Если по программе отведено достаточно времени для изучения формулы Бернулли, то далее можно в процессе беседы подвести учащихся к выводу формулы. Если такой возможности нет, то формулу можно просто сообщить.

Внимательно изучая условие и построенное дерево, приходим к выводам:

- 1) трижды осуществляется одно и то же действие (проводится три одинаковых испытания);
- 2) результаты одного испытания не влияют на результаты другого;
- 3) к событию A ведут те ветки, на которых 2 выигрыша и один проигрыш (таких веток всего три);
- 4) при вычислении вероятности мы складываем три одинаковых произведения.

Если бы монета была изогнута и, например, вероятность выигрыша жребия была равна 0,7, то вероятность двух выигрышей жребия была бы равна

$$P(A) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7.$$

И в этом случае три слагаемых одинаковы.

Таким образом, нам нужно знать, чему равно одно слагаемое и сколько таких слагаемых будет.

Решим задачу в общем виде.

Пусть проводится n одинаковых испытаний, причем результаты одних испытаний не влияют на результаты других. Такие испытания называются повторными независимыми испытаниями или испытаниями Бернулли. В каждом испытании мы можем получить желаемый результат (назовём его успехом – A или «+»), а можем не получить (неудача – $\bar{A}$ или «-»). Так как испытания одинаковые, то вероятность успеха в каждом испытании должна быть одинаковой. Обозначим вероятность успеха $P(A) = p$. Тогда вероятность неудачи будет равна $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

Найдём вероятность того, что в n испытаниях успех появился k раз (а неудача – $n-k$ раз).

Если бы мы построили вероятностное дерево, то нам пришлось бы выбрать те ветки, на которых знак «+» встречается k раз, а знак «-» – $n-k$ раз. Тогда вероятность для одной такой ветки будет равна $p^k \cdot q^{n-k}$.

Осталось выяснить, сколько таких веток будет у дерева. Можно заметить, что на каждой ветке должно быть всего n знаков, и ветки отличаются последовательностью расположения знаков. Чтобы учесть все такие ветки, нам нужно выбрать места для знаков «+», а минусы поставить на оставшиеся места. Это можно сделать $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ способами. Следовательно, столько одинаковых слагаемых мы получим. Тогда вероятность появления k успехов в n независимых испытаниях находится по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k \cdot q^{n-k}.$$

Чтобы учащиеся могли успешно пользоваться полученной формулой, нужно предложить им схему решения как и в случае с классическим определением вероятности. В противном случае возможна путаница с вероятностью одного успеха и вероятностью, которую требуется найти.

Схема решения задач по формуле Бернулли

1. В чем заключается одно испытание?
2. В чем заключаются успех (событие A) и неудача (событие $\bar{A}$) в одном испытании?
3. Чему равны вероятности успеха и неудачи (p , q)?
4. Сколько испытаний (n) проводится?
5. Сколько успехов (k) должно произойти?

Вернемся к задаче, поставленной в начале параграфа.

Задача 1. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Решение

- 1) Одно испытание - подбрасывание монеты.
- 2) Успехом A будем считать выпадение герба, неудачей – выпадение решки.
- 3) Вероятность успеха равна $p = 0,5$ и вероятность неудачи равна $q = 0,5$.
- 4) Монета подбрасывается три раза, следовательно, $n=3$.

Подставим значения величин в формулу Бернулли:

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^{3-2} = 0,375.$$

В учебниках имеется достаточное количество стандартных задач, решаемых по формуле Бернулли. Мы в качестве примеров рассмотрим более интересные задачи.

Следующая задача отличается тем, что в условии нет никаких числовых данных. Тем более будет интересно составить математическую модель и ее решить.

Задача 2. Пассажиру, путешествующему в купейном вагоне, удобно, если все его попутчики – лица того же пола, что и он. Сколько процентов от таких пассажиров в стране испытывают удобства?

Решение

- 1) Одно испытание – покупка одного билета.
- 2) Успех – билет купила женщина, неудача – билет купил мужчина.
- 3) Будем считать, что мужчин и женщин поровну. Тогда вероятности успеха и неудачи равны: $p = 0,5$, $q = 0,5$.
- 4) Так как в купе 4 места, то должно быть куплено 4 билета: $n = 4$.
- 5) Так как в купе должны быть лица одного пола, то $k = 4$ или $k = 0$.

Союз «или» указывает на сложение вероятностей:

$$P_4(4) + P_4(0) = C_4^4 \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^0 + C_4^0 \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^4 = 0,125.$$

Умножив результат на 100%, получим ответ: примерно 12,5% пассажиров путешествует с удобствами.

Следующие две задачи подобраны так, чтобы учащиеся тратили как можно меньше времени на вычисления.

Задача 3. Наблюдения показывают, что в среднем каждый третий лебедь не возвращается в родные края после долгих странствий: много всяких невзгод и неожиданностей подстерегают их в пути. Предположим, что благополучный перелет для каждого лебедя является независимым от других лебедей случайным событием. Осенью орнитологи сумели зарегистрировать каждую особь в большом количестве лебединых стай. Каждая стая состояла

всего из семи лебедей. Какая примерно доля этих стай вернется весной в любимые места своих гнездований в полном составе?

Решение

- 1) Одно испытание – перелет одного лебедя.
- 2) Успех – событие A – лебедь вернулся в любимое место гнездований, неудача – лебедь не вернулся.
- 3) Так как в среднем каждый третий лебедь не возвращается, то из трёх лебедей возвращается два, следовательно, вероятность успеха равна $p = \frac{2}{3}$, вероятность неудачи равна $q = \frac{1}{3}$.
- 4) В стае 7 лебедей, тогда и число испытаний равно семи: $n = 7$.
- 5) Мы находим вероятность того, что стая вернется в полном составе, поэтому число успехов равно $k = 7$.

Подставим величины в формулу Бернулли:

$$P_7(7) = C_7^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \approx 0,059.$$

Согласно полученной вероятности можно сказать, что в полном составе возвращается примерно 6 стай из 100 или около 6% стай от их общего числа.

Задача 4. Задача «Золотая макрель». «Жил старик со своею старухой... Ровно тридцать лет и три года. Старик ловил неводом рыбу», соблюдая указ рыбнадзора: в день 7 штук и ни больше, ни меньше. Что поймает, то за день съедали. Был у них еще Кот, долгожитель, привередливый, пуще старухи. Он питался одной лишь макрелью. Но макрель попадает в сети вдвое реже, чем прочие рыбы. Для Кота же в течение жизни уж 700 дней набралось голодных. А теперь, дорогой наш читатель, расскажи о повадках макрели: Ходит в море она косяками или плавает поодиночке?

Решение

Из условия задачи следует, что относительная частота того, что кот останется голодным, равна $P^* = \frac{700}{33 \cdot 365} \approx 0,058$ (считаем, что кот живет 33 года, так как сказано, что он долгожитель).

По условию, старику можно вылавливать только по 7 рыбок. Тогда можно считать, что в отдельно взятый день старик проводит 7 испытаний; одно испытание – вылов одной рыбки. Если макрель плавает поодиночке, то испытания будут независимыми, то есть результат одного вылова не будет влиять на результат последующего. Если макрель плавает косяками, то испытания независимыми назвать нельзя, то есть, если выловили макрель, то и следующая рыбка будет, скорее всего, макрелью.

У нас есть инструмент (формула Бернулли) для независимых испытаний. Поэтому будем решать задачу в предположении, что макрель плавает поодиночке. Если результат совпадет с относительной частотой, то наше предположение верное. В противном случае мы сделаем вывод, что макрель плавает косяками. Решаем задачу по схеме.

- 1) Одно испытание – вылов одной рыбки.
- 2) Успех – поймана макрель, неудача – поймана не макрель.

3) В условии сказано, макрель попадает в сети вдвое реже, чем прочие рыбы. Это означает, что если поймана одна макрель, то пойманы еще две другие рыбы. Тогда вероятность успеха равна $p = \frac{1}{3}$, а вероятность неудачи равна $q = \frac{2}{3}$.

4) Число всех испытаний равно $n = 7$.

5) Так как мы будем сравнивать результат с относительной частотой «голодных» дней, то число успехов равно $k = 0$.

Итак, вероятность того, что в произвольно выбранный день кот останется голодным, равна

$$P_7(0) = C_7^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \approx 0,059.$$

Сравним результаты: $P^* \approx P_7(0)$. Это означает, что наше предположение о том, что макрель плавает поодиночке, было верным.

При решении последней задачи мы еще раз акцентируем внимание на использовании статистического определения вероятности. Таким образом, изучаемый в школе курс теории вероятностей выглядит взаимосвязанным.

Если есть возможность, один из уроков можно провести в компьютерном классе. Это позволит не тратить время на вычисления, а сосредоточиться на некоторых очень важных аспектах темы. К сожалению, без использования компьютера в условиях ограниченного времени невозможно показать учащимся актуальность изучаемой темы.

Ниже рассмотрим варианты заданий, которые можно выполнить в компьютерном классе.

Формула Бернулли задает так называемое биномиальное *распределение*, которое можно представить с помощью таблицы распределения вероятностей:

Значения	0	1	...	n
Вероятности	$p_n(0)$	$p_n(1)$	...	$p_n(n)$

Задача 5. Монета бросается 7 раз. Сколько раз при этом может появиться герб? Найдите вероятности того, что герб появится 0, 1, 2, ..., 7 раз. Заполните таблицу:

Число успехов k	0	1	2	3	4	5	6	7
Вероятность числа успехов $P_n(k)$								

Решение. В документе Excel получим таблицу на рис. 49 (подробные инструкции по работе с приложением представлены в приложении 2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	число успехов	0	1	2	3	4	5	6	7
2	вероятность	0,007813	0,054688	0,164063	0,273438	0,273438	0,164063	0,054688	0,007813

Рис. 49

Предложим учащимся найти сумму всех вероятностей во второй строке (рис. 50).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	число успехов	0	1	2	3	4	5	6	7	
2	вероятность	0,007813	0,054688	0,164063	0,273438	0,273438	0,164063	0,054688	0,007813	1
3										

Рис. 50

Итак, сумма вероятностей равна 1. Также легко заметить, что значения вероятностей больше в центре, меньше по краям. В этой задаче также наблюдается симметрия значений. Причина симметрии – равенство вероятностей успеха и неудачи в одном испытании. Можно также заметить, что для 4 и 5 успехов вероятности принимают наибольшее значение. Можно сказать, что 4 и 5 – наиболее вероятное число успехов.

Таблица на рисунке 50 задает координаты точек в системе координат. Отметим эти точки и в целях наглядности соединим отрезками. (В приложении 2 дается описание построения графика.)

Построив график распределения вероятностей замечаем, что информация о распределении вероятностей нами получена в наглядном виде (рис. 51).

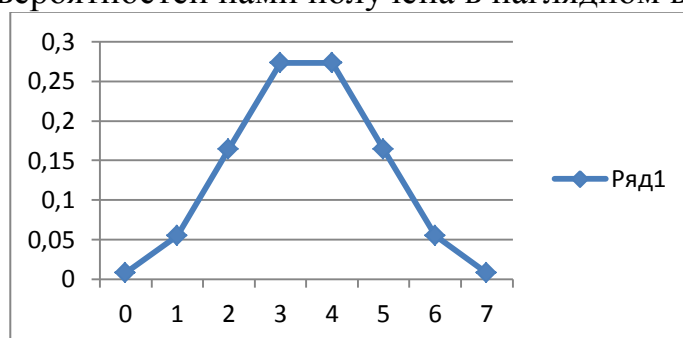


Рис. 51

Задача 6. Монета бросается 8 раз. Сколько раз при этом может появиться герб? Найдите вероятности того, что герб появится 0, 1, 2, ..., 8 раз. Постройте график.

Решение представлено на рис. 52.

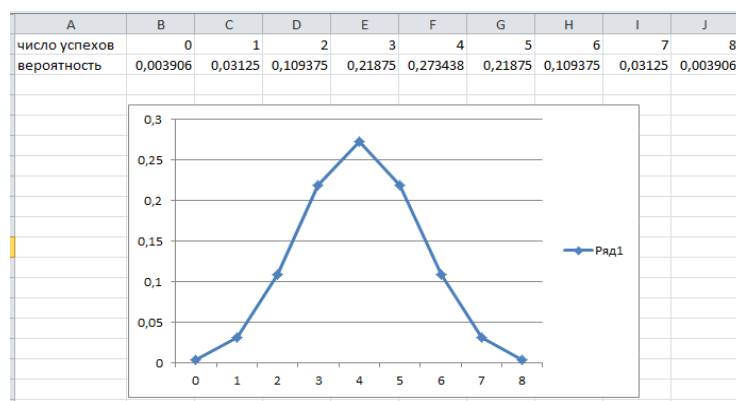


Рис. 52

Здесь также можно заметить, что сумма всех вероятностей равна 1, а наиболее вероятное число успехов одно – 4.

Проследим, как будет изменяться график распределения вероятностей при изменении вероятности успеха.

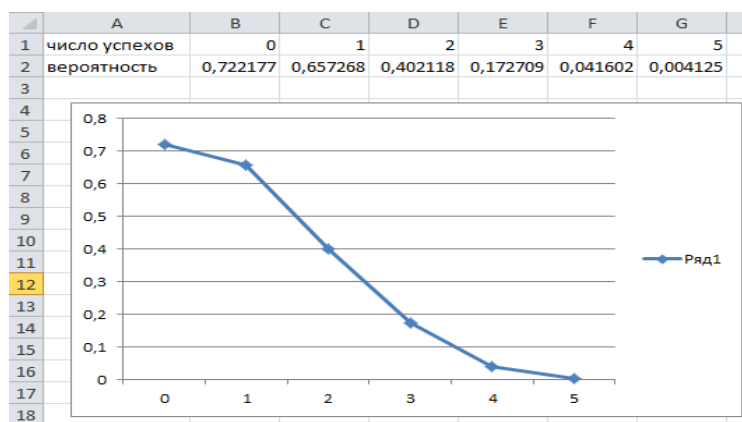


Рис. 53

Задача 7. Некоторое испытание проводится 5 раз. Вероятность успеха в одном испытании равна $1/3$. Постройте график распределения вероятностей.

Решение. График представлен на рис. 53.

Задача 8. Некоторое испытание проводится 5 раз. Вероятность успеха в одном испытании равна $2/3$. Постройте график распределения вероятностей.

Решение. График представлен на рис. 54.

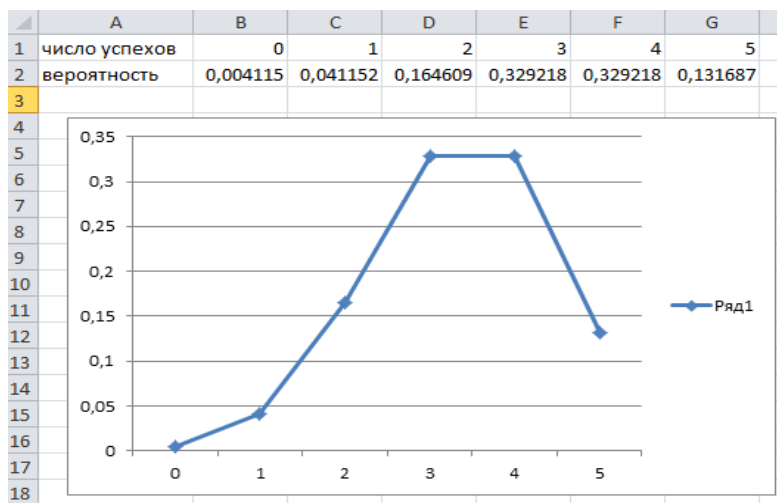


Рис. 54

При решении задач 7 и 8 заметим, что сумма всех вероятностей также равна 1. Замечаем отсутствие симметрии у графика. Если вероятность успеха меньше 0,5, то максимальные значения вероятности соответствуют меньшему числу успехов и, наоборот, в случае, если вероятность успеха больше 0,5 – максимальные значения вероятности соответствуют большему числу успехов.

Решение задач 7 и 8 готовит учащихся к восприятию информации относительно практических приложений биномиального распределения. Беседа о практических приложениях выходит за рамки программы, да и

самого понятия «биномиальное распределение» нет в школьных учебниках. Но если есть хоть немного учебного времени в запасе, не стоит упускать такую возможность. Опыт показывает, что учащиеся с интересом включаются в беседу, если расчеты в задачах уже представлены на слайдах.

Как уже говорилось ранее, формула Бернулли задаёт биномиальное распределение вероятностей. Причем «характер» распределения виден по рисункам 51-54. Если вероятности успеха и неудачи равны 0,5, то распределение вероятностей симметричное. Если вероятность успеха меньше 0,5, то наблюдается левосторонняя асимметрия в распределении вероятностей, если же вероятность больше 0,5, то – правосторонняя асимметрия.

Биномиальное распределение наблюдается при решении задачи о снабжении энергией, при проверке лекарств, сывороток и вакцин. Рассмотрим эти задачи.

Задача о снабжении энергией

Предположим, что $n = 10$ рабочих должны время от времени использовать электрическую энергию, и нас интересует ожидаемая общая нагрузка. При грубом приближении будем считать, что в течение любого заданного промежутка времени каждому рабочему с одной и той же вероятностью p требуется единица энергии. Если рабочие действуют независимо друг от друга, то вероятность того, что одновременно ровно k рабочим потребуется энергия, находится по формуле Бернулли. Если каждый рабочий использует электроэнергию в среднем 12 минут в час, то следует принять $p = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$. Тогда распределение вероятностей имеет вид:

k	0	1	2	3	4	5
$P_{10}(k)$	0,107374	0,268435	0,30199	0,201327	0,08808	0,026424

k	6	7	8	9	10
$P_{10}(k)$	0,005505	0,000786	$7,37 \cdot 10^{-5}$	$4,1 \cdot 10^{-6}$	$1,02 \cdot 10^{-7}$

Вероятность того, что не менее семи рабочим потребуется электроэнергия, равна

$$P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) = 0,0008643584.$$

Иначе говоря, если снабжение рассчитано на 6 единиц электроэнергии, то вероятность перегрузки равна приблизительно 0,00086, то есть перегрузка ожидается в среднем в течение одной минуты из 1157 минут, или приблизительно одной минуты из 20 часов.

Проверка сывороток и вакцин

Предположим что нормальная частота заболеваний определенной болезнью среди крупного рогатого скота составляет 25%. Для проверки новой вакцины n животным делается прививка. Как оценить результат эксперимента? Будем считать успехом событие A – животное здорово, тогда

$p = 0,57$. Для абсолютно недейственной вакцины вероятность иметь ровно k здоровых животных будет вычисляться по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot (0,75)^k \cdot (0,25)^{n-k}.$$

При $n = 10$ распределение вероятностей имеет вид:

k	0	1	2	3	4
$P_{10}(k)$	$9,5367 \cdot 10^{-7}$	$2,86 \cdot 10^{-7}$	0,000386	0,00309	0,016222

k	5	6	7	8	9	10
$P_{10}(k)$	0,058399	0,145998	0,250282	0,281568	0,187712	0,056314

Очевидно, что первая половина значений нам мало интересна, так как мы заинтересованы в большем количестве здоровых животных. Поэтому достаточно рассматривать «хвост» распределения справа. Так как $P_{10}(10) \approx 0,056$, то отсутствие заболеваний среди 10 животных можно рассматривать как подтверждение, хотя и не окончательное, эффективности вакцины (не окончательное потому, что вероятность немного больше, чем 0,05, а это значит, что отсутствие больных животных из 10 для недейственной вакцины нельзя назвать практически невозможным). Выходит, 10 животных для проверки вакцины взять недостаточно.

Запишем правый «хвост» распределения вероятностей при $n = 17$:

k	...	13	14	15	16	17
$P_{10}(k)$	...	0,220868314	0,189316	0,113589	0,042596	0,007517

Замечаем, что

$$P_{10}(16) \approx 0,043 < 0,05 \quad \text{и} \quad P_{10}(17) \approx 0,008 < 0,05.$$

Следовательно, наличие одного больного животного или их отсутствие среди 17 животных при недейственной вакцине есть события практически невозможные. Таким образом, одно заболевание или его отсутствие среди 17 животных есть более сильное свидетельство в пользу вакцины, чем отсутствие заболеваний среди 10 животных.

Проверка эффективности лекарства

Предположим, что n человек измеряют своё кровяное давление до приема лекарства и после него и получают соответственно результаты: $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$.

Будем говорить, что k -тое испытание закончилось успехом, если $x_k > x'_k$, и неудачей, если $x_k \leq x'_k$. Если бы лекарство не было эффективным, то наши наблюдения соответствовали бы n испытаниям Бернулли с $p = \frac{1}{2}$. График распределения вероятностей был бы симметричным и наиболее вероятное число успехов было бы в центре всевозможных значений k . Поэтому большее число успехов следует рассматривать как доказательство эффективности лекарства.

В Приложении 3 предлагается вариант домашней работы по теме «Формула Бернулли».

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица соответствия языков теории вероятностей
и теории множеств

Обозначения	Теория множеств	Теория вероятностей
Ω	Множество, пространство	Пространство элементарных событий, достоверное событие
ω	Элемент множества	Элементарное событие
A, B	Подмножества	Случайные события
$A+B=A \cup B$	Объединение множеств	Сумма событий
$AB=A \cap B$	Пересечение множеств	Произведение событий
$\bar{A}, \bar{A}$	Дополнение множества A	Событие, противоположное событию A
$A \cap B = \emptyset, AB = V$	Множества A и B не пересекаются	События A и B несовместные
$A \setminus B$	Разность множеств	Событие, когда происходит A и не происходит B

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Инструкции по работе с приложением Excel

Задача 5. Монета бросается 7 раз. Сколько раз при этом может появиться герб? Найдите вероятности того, что герб появится 0, 1, 2, ..., 7 раз. Заполните таблицу:

Число успехов k	0	1	2	3	4	5	6	7
Вероятность числа успехов $P_n(k)$								

Решение. В документе Excel заполним первую строку (рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	число успехов	0	1	2	3	4	5	6	7	
2	вероятность									
3										
4										

Рис. 1

Одно испытание – одно бросание монеты. Успех A – появление герба. Вероятность успеха в одном испытании $p = 0,5$.

Выделяем ячейку B2, в неё будет внесено значение вероятности.

Воспользуемся статистической функцией БИНОМ.РАСП мастера функций f_x пакета Excel, которая позволяет определить вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится ровно k раз в n независимых испытаниях (рис. 2):

Формулы → Другие функции → Статистические → БИНОМ.РАСП.

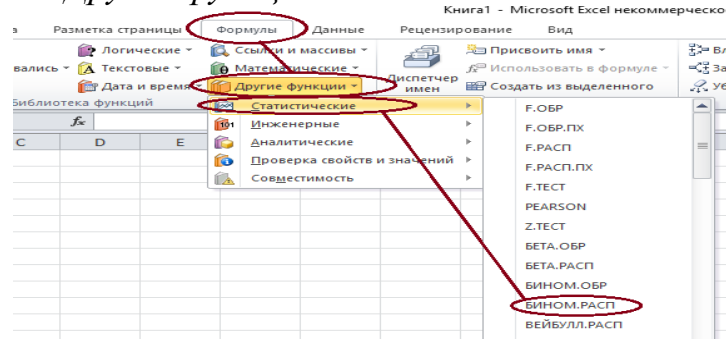


Рис. 2

Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить (рис. 3).

Рис. 3

В поле «число успехов» можно вписать значений «0», но для оптимизации вычислений мы внесём запись «B1», так как значение «0» находится в этой ячейке. Нажимаем кнопку «Ок» (рис. 4).

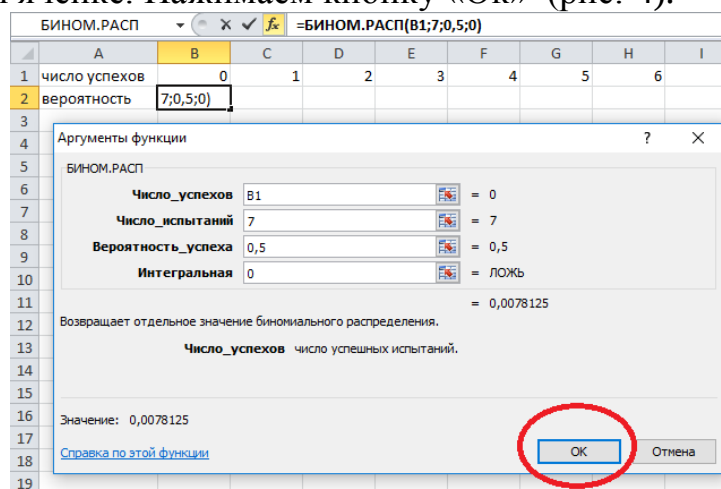


Рис. 4

В ячейке B2 появилось значение вероятности (рис. 5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	число успехов	0	1	2	3	4	5	6	7
2	вероятность	0,007813							
3									

Рис. 5

«Растянем» границу ячейки B2 до ячейки I2 (рис. 6).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	число успехов	0	1	2	3	4	5	6	7
2	вероятность	0,007813							
3									

Рис. 6

В результате получим все искомые вероятности (рис. 7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	число успехов	0	1	2	3	4	5	6	7
2	вероятность	0,007813	0,054688	0,164063	0,273438	0,273438	0,164063	0,054688	0,007813
3									

Рис. 7

Предложим учащимся найти сумму всех вероятностей во второй строке (рис. 8). После нажатия клавиши «Enter», в ячейке J2 получим 1 (рис. 9).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	число успехов	0	1	2	3	4	5	6	7	
2	вероятность	0,007813	0,054688	0,164063	0,273438	0,273438	0,164063	0,054688	0,007813	=СУММ(B2:I2)
3										

Рис. 8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	число успехов	0	1	2	3	4	5	6	7	
2	вероятность	0,007813	0,054688	0,164063	0,273438	0,273438	0,164063	0,054688	0,007813	1
3										

Рис. 9

Приходим к выводу, что сумма вероятностей всех возможных чисел успеха равна 1.

Предложим учащимся построить график полученного распределения вероятностей. Для этого выделим вероятности во второй строке и «пройдем» по вкладкам *Вставка* → *График* (рис. 10).

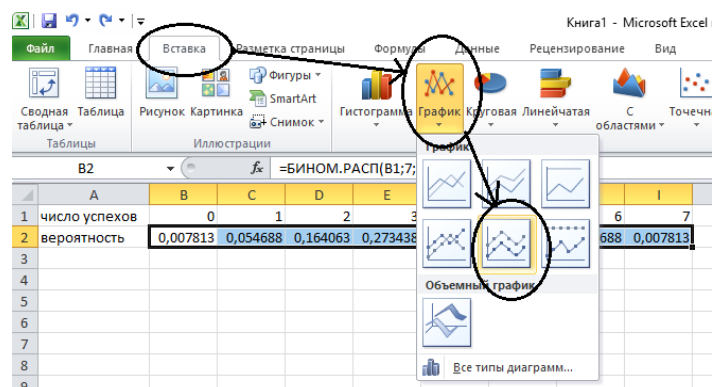


Рис. 10

В результате получаем график, представленный на рисунке 11. По горизонтальной оси должно быть отложено число успехов, по вертикальной – вероятности.

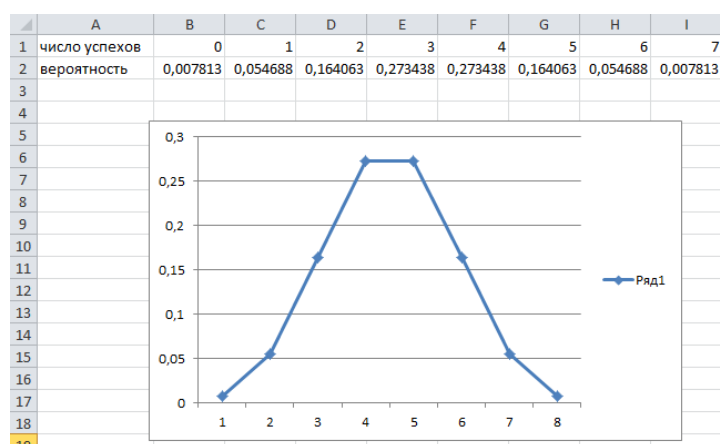


Рис. 11

Чтобы по горизонтальной оси было отложено число успехов от 0 до 7, щёлкнем на поле диаграммы правой кнопкой мыши и выберем «Выбрать данные...» (рис. 12).

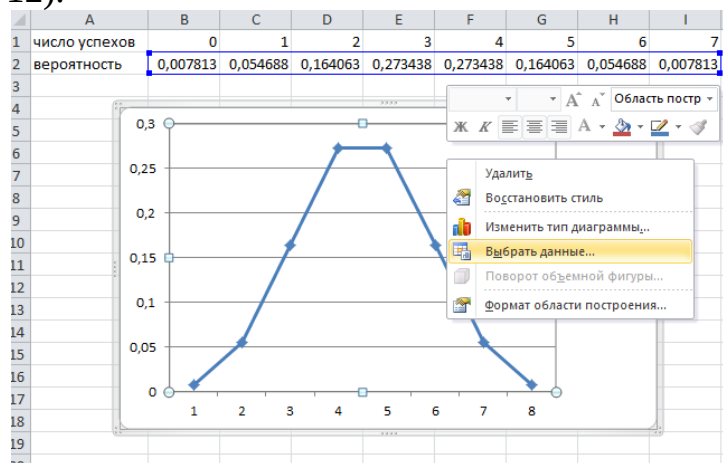


Рис. 12

В раскрывшемся диалоговом окне нажимаем кнопку «Изменить» в подписях горизонтальной оси (рис. 13).

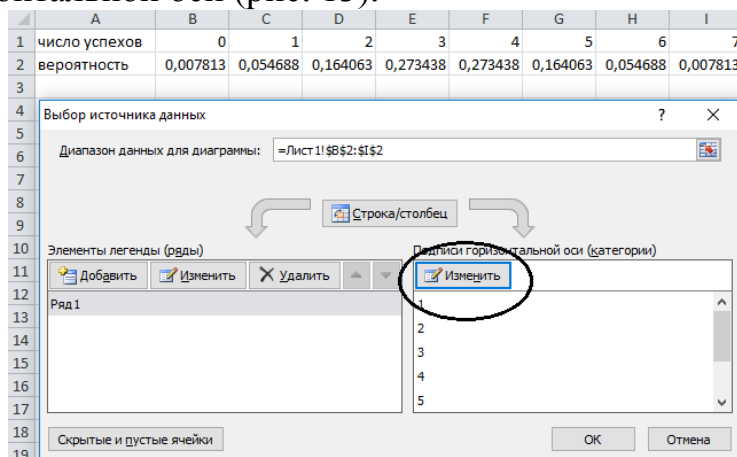


Рис. 13

При раскрытии нового диалогового окна выделяем ячейки B1-I1 и нажимаем «Ок» и еще раз «Ок» в другом диалоговом окне (рис. 14).

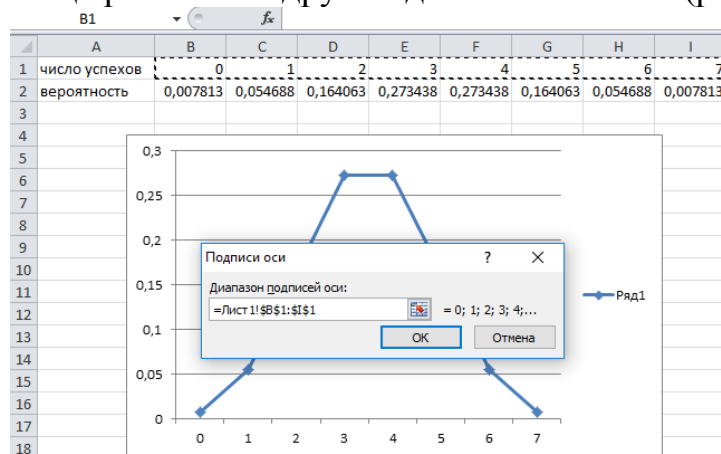


Рис. 14

В результате получим график, представленный на рис. 15.

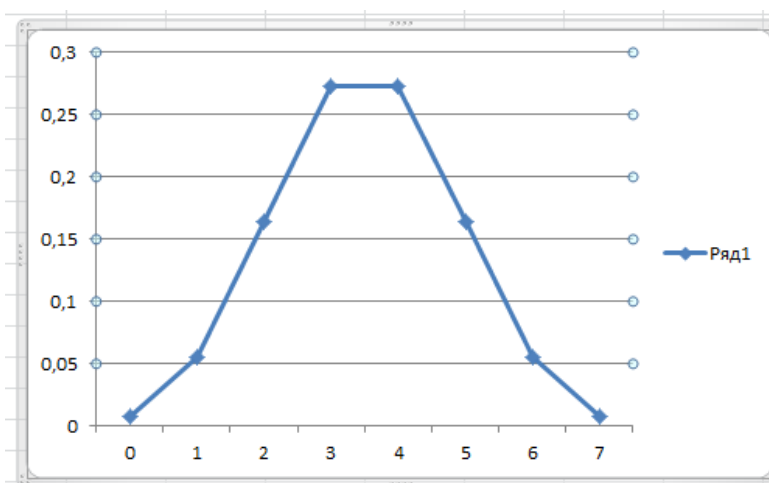


Рис. 15

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

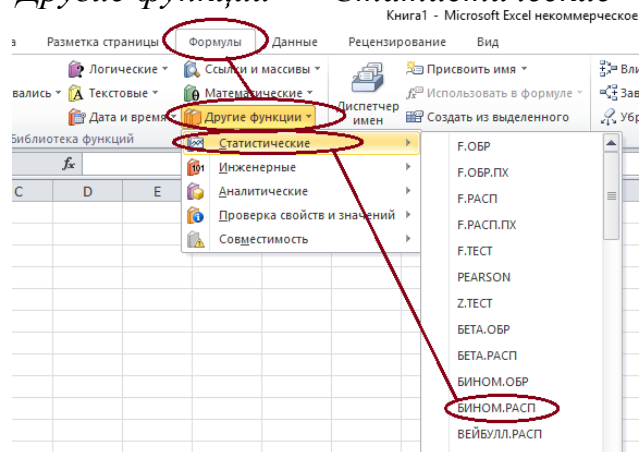
Домашнее задание по теме «Формула Бернулли»

Формула Бернулли задает *биномиальное распределение*, которое можно представить с помощью таблицы распределения вероятностей:

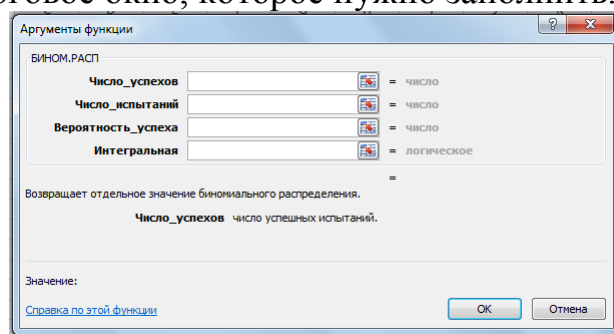
Значения	0	1	...	n
Вероятности	$p_n(0)$	$p_n(1)$	...	$p_n(n)$

Статистическая функция БИНОМ.РАСП мастера функций f_x пакета Excel позволяет определить вероятность $P_n(k)$ того, что событие А появится ровно k раз в n независимых испытаниях.

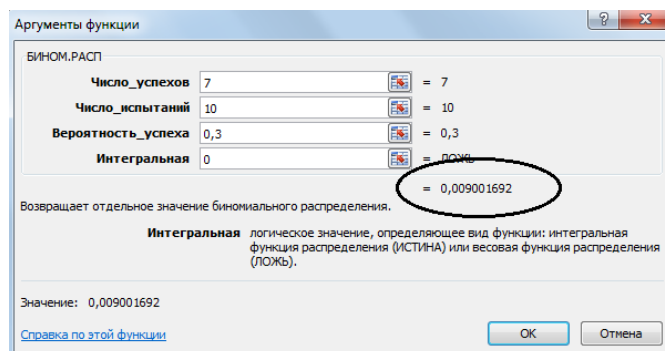
Формулы → Другие функции → Статистические → БИНОМ.РАСП.



Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить.



Пример 1. Проводится серия из 10 испытаний. В каждом из них вероятность появления события А постоянна и равна 0,3. Определим с помощью функции БИНОМ.РАСП вероятность того, что событие А появится 7 раз:



Таким образом, $p_{10}(7) \approx 0,009$.

Пример 2. Ученик не подготовился к тесту и поэтому отвечает на вопросы теста наугад. Составим ряд распределения числа правильных ответов, если тест состоит из 7 вопросов, к каждому вопросу дается 4 ответа, причем только один из них верный.

Всего испытаний $n=7$, вероятность успеха в одном испытании (при ответе на один вопрос) $p=0,25$.

Введем в ячейки B1:I1 число успехов, а в ячейках B2:I2 с помощью функции БИНОМ.РАСП мастера функций f_x пакета Excel вычислим соответствующие вероятности:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	число успехов	0	1	2	3	4	5	6	7
2	вероятность	0,133484	0,311462	0,311462	0,173035	0,057678	0,011536	0,001282	0,000061

Выделив ячейки B2:I2 и нажав на значок Σ на вкладке «Главная» убеждаемся в том, что сумма всех вероятностей равна 1:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
число успехов	0	1	2	3	4	5	6	7	
вероятность	0,133484	0,311462	0,311462	0,173035	0,057678	0,011536	0,001282	0,000061	1

Заметим, что вероятность дать 5 правильных ответов при простом угадывании равна 0,011536, что меньше, чем 0,05. Следовательно, практически невозможно при простом угадывании правильно ответить на 5, или 6, или 7 вопросов. Это означает, что положительную оценку ученику можно ставить только в случае, если он правильно ответит не менее чем на 5 вопросов.

Задание 1. Ученик не подготовился к тесту и поэтому отвечает на вопросы теста наугад. Составьте ряд распределения числа правильных ответов, если тест состоит из 10 вопросов, к каждому вопросу дается 2 ответа, причем только 1 из них верный. Начиная с какого числа правильных ответов, ученику можно ставить положительную оценку?

Задание 2. Ученик не подготовился к тесту и поэтому отвечает на вопросы теста наугад. Составьте ряд распределения числа правильных ответов, если тест состоит из 6 вопросов, к каждому вопросу дается 3 ответа, причем только 1 из них верный. Начиная с какого числа правильных ответов, ученику можно ставить положительную оценку?

Список использованных источников

1. Плоцки, А. Вероятность в задачах для школьников: Кн. Для учащихся / А. Плоцки. – М.: Просвещение, 1996. – 191 с.
2. Скворцов, В.В. Викторина по элементам теории вероятностей / В.В. Скворцов. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989. – 38 с.
3. Тюрин, Ю.Н. Теория вероятностей и статистика / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Яценко. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2008. – 256.
4. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ. / В. Феллер. – М.: Мир, 1984. – 528 с.

Содержание

Предисловие	3
§ 1. Изучение основных понятий теории вероятностей	5
§ 2. Классическое определение вероятности	14
§3. Справедливость выбора	20
§4. Статистическое определение вероятности	25
§ 5. Классическое определение вероятности в задачах КИМ ЕГЭ	29
§ 6. Операции над событиями	33
§ 7. Условная вероятность. Теоремы умножения и сложения вероятностей	35
§ 8. Формула полной вероятности	43
§ 9. Основные теоремы и вероятностное дерево в задачах ЕГЭ	49
§ 10. Геометрическая вероятность	55
§ 11. Формула Бернулли	59
Приложение 1	69
Приложение 2	70
Приложение 3	74
Список использованных источников	76